

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО**  
**ГОСПОДАРСТВА**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**для практичних занять, виконання контрольних робіт і  
самостійної роботи з розділу “СТАТИКА”  
курсу теоретичної механіки**

(для студентів спеціальностей 6.092100 – „Промислове і цивільне будівництво”, 6.092103 – „Міське будівництво та господарство”, 6.092108 – „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092600 – „Водопостачання та водовідведення”, 6.092202 – „Електричний транспорт”, 6.092201 – „Електричні системи і комплекси транспортних засобів”, 6.092203 – „Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”)

**ХАРКІВ - ХНАМГ – 2008**

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи з розділу “Статика” курсу теоретичної механіки (для студентів спеціальностей 6.092100 – „Промислове і цивільне будівництво”, 6.092103 – „Міське будівництво та господарство”, 6.092108 – „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092600 – „Водопостачання та водовідведення”, 6.092202 – „Електричний транспорт”, 6.092201 – „Електричні системи і комплекси транспортних засобів”, 6.092203 – „Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”). Укл.: Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О., Склярів В.О. - Харків, 2008. - 57 с.

Укладачі: Шпачук В.П.,  
Золотов М.С.,  
Рубаненко О.І.,  
Гарбуз А.О.,  
Склярів В.О.

Рецензент: проф. кафедри теоретичної і будівельної механіки,  
к.т.н. Пушня В.О.

Рекомендовано до друку рішенням засідання кафедри теоретичної і будівельної механіки від 30.10.2007 р. протокол № 3

## ***ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ***

Під час вивчення курсу теоретичної механіки дані методичні вказівки використовуються викладачем при проведенні практичних занять і контрольних робіт, а студентами в процесі самостійної роботи при виконанні розрахунково-графічних завдань.

Терміни здачі завдань і номери варіантів указуються викладачем у плані-графіку виконання самостійної роботи. При розв'язанні задачі, що поставлена в завданні, слід використовувати конспект лекцій, рекомендовану літературу і відповідні методичні вказівки.

Виконуючи розрахунково-графічне завдання, необхідно твердо засвоїти основні визначення, положення і відповідні теореми розд.1.

Під час здачі кожного завдання студент повинен пояснити порядок виконання задачі, знати і чітко формулювати теоретичний матеріал, пов'язаний з розрахунком, вміти розв'язати подібну задачу.

Розрахунково-графічне завдання треба оформляти на стандартних аркушах паперу формату А4 (розмір  $210 \times 297$  мм) з полями: зліва - 20 мм, справа, зверху і знизу - по 5 мм. Писати треба тільки з одного боку аркуша. На першому аркуші вказати прізвище, групу і номер варіанта, викреслити розрахункову схему і записати умову задачі. Розв'язання задачі навести далі і на наступних аркушах з короткими поясненнями. Зробити перевірку результатів. У кінці навести результати розрахунку.

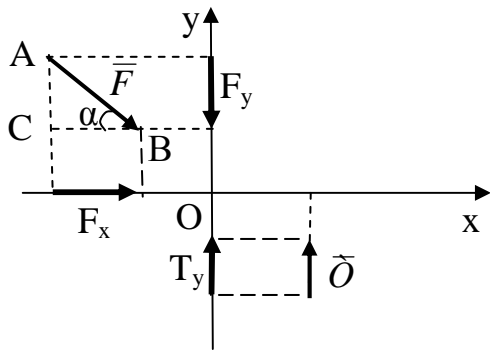
У кінці семестру до всіх розрахунково-графічних завдань треба прилаштувати титульний аркуш, зброштурувати їх і здати викладачеві.

# 1. РІВНОВАГА ПЛОСКОЇ СИСТЕМИ СИЛ

## 1.1. Проекція сили на вісь

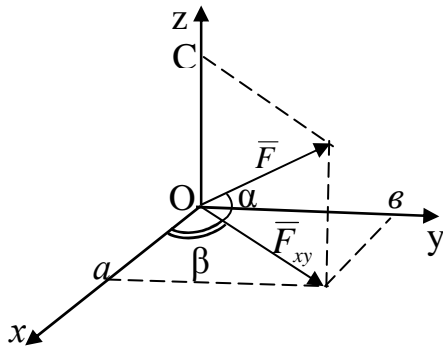
Проекція сили на вісь - алгебраїчна величина, що дорівнює довжині відрізка між проекціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-» - якщо в бік від'ємного напрямку. Наприклад,

$$F_x = F \cos \alpha, F_y = -F \sin \alpha, T_x = 0, T_y = T.$$



Величина проекції сили визначається рішенням трикутника  $ABC$ , який утворюється початковою силою і лініями, паралельними осям координат. Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

Якщо сила знаходиться у просторі, то її проекції визначаються так:



$$F_x = 0a = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta,$$

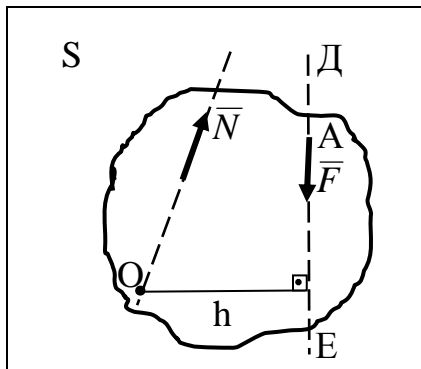
$$F_y = 0b = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta,$$

$$F_z = 0c = F \sin \alpha.$$

## 1.2. Алгебраїчний момент сили відносно точки

При розв'язанні задач у площині  $S$  використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

**Правило визначення алгебраїчного моменту  $M_0(\vec{F})$  сили  $\vec{F}$  відносно точки (O):**



- 1) провести лінію дії сили (пряма ДЕ);
- 2) з вибраної точки O провести перпендикуляр на лінію дії сили (його довжина  $h$  - плече сили);
- 3) скласти добуток модуля сили на плече ( $F \cdot h$ );

4) взяти знак «+», якщо сила прагне обертати плече сили відносно точки O проти руху годинникової стрілки, і знак «-», якщо за рухом стрілки годинника:

$$M_0(\vec{F}) = -F \cdot h.$$

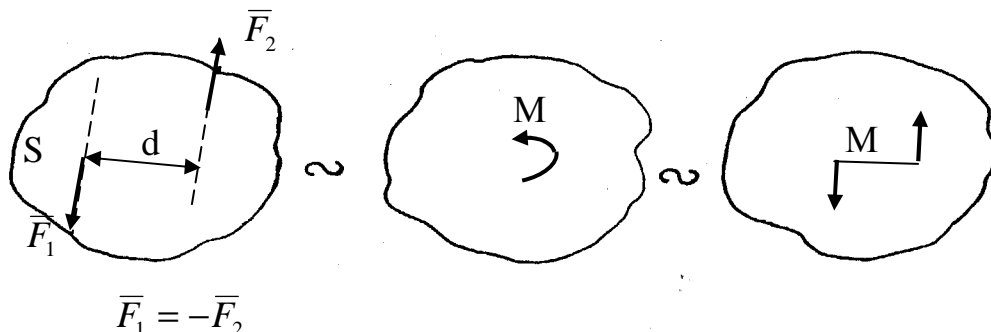
Алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (тоді плече  $h=0$ )

$$M_0(\vec{N}) = 0.$$

### 1.3. Пара сил

Парою сил називається система двох сил у площині S, які рівні за величиною, протилежно напрямлені і не лежать на одній лінії дії.

Схематичне позначення моменту пари сил:

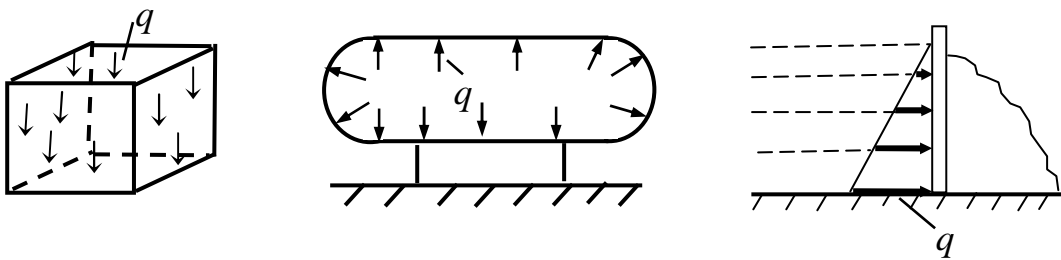


Плече пари  $d$  - найкоротша відстань між лініями дії сил, що складають пару.

Модуль моменту пари не залежить від вибору точки і дорівнює  $M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$ . Сума проекцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю, тобто її рівнодійна завжди рівна нулю.

#### 1.4. Розподілені сили

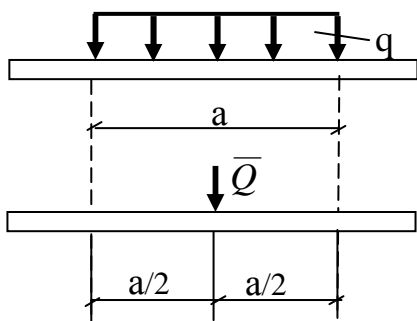
**Розподілені сили** (розподілене навантаження) - система паралельних сил, які діють на кожну точку об'єму, поверхні або лінії:



Плоска система розподілених сил (сили розподілені уздовж лінії) характеризується її інтенсивністю  $q$ , тобто силою, яка припадає на одиницю довжини:  $[q] = \frac{H}{m}$ .

Для розв'язання задач рівноваги розподілені сили звичайно замінюють рівнодійною  $\bar{Q}$ .

Рівномірно розподілені сили:  $q = \text{const}$ .



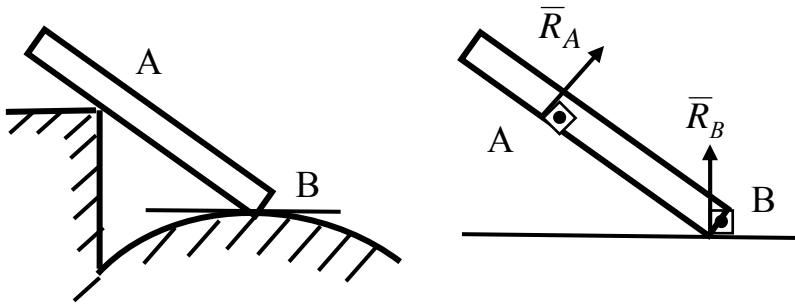
Рівнодійна такої системи сил  $\bar{Q}$  дорівнює за модулем

$$Q = q \cdot a$$

і прикладена посередині відрізка, на який діють розподілені сили.

## 1.5. Види в'язей у площині і напрям їх реакцій

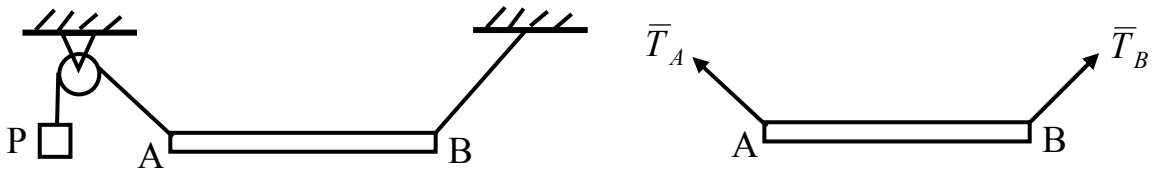
### 1. Ідеальна гладенька поверхня.



Реакція напрямлена перпендикулярно до дотичної у точці торкання тіла і поверхні.

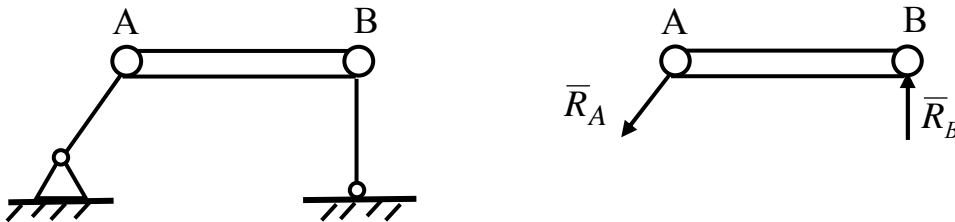
### 2. Нитка (трос і т.п.).

Реакція напрямлена уздовж нитки від тіла.



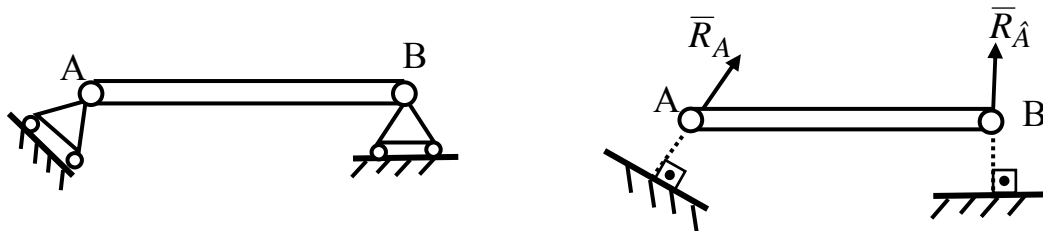
### 3. Ідеальний стержень (невагомий стержень з шарнірами на кінцях).

Реакція напрямлена уздовж осі стержня (лінії, яка з'єднує 2 шарніра стержня) і може мати будь-яке напрямлення уздовж цієї осі (залежить від того, розтягнутий або стиснений стержень).



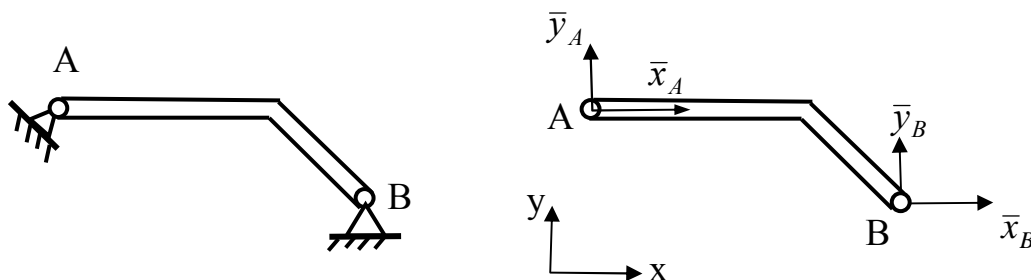
### 4. Рухомий шарнір.

Реакція напрямлена перпендикулярно до поверхні, на яку спираються катки рухомого шарніра, від поверхні.



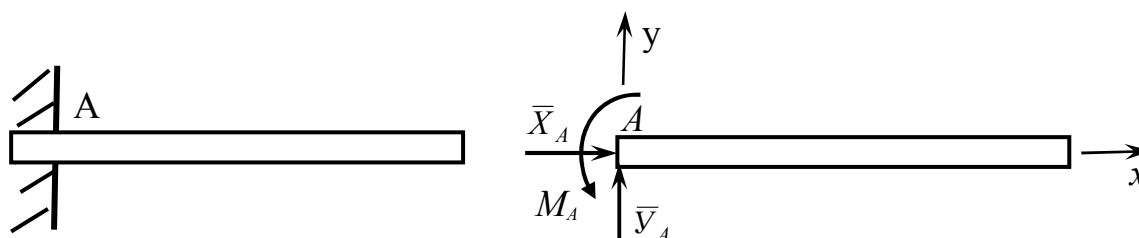
### 5. Нерухомий шарнір.

Реакція проходить через вісь шарніра і може мати будь-яке напрямлення у площині рисунку. При розв'язанні задач реакцію зображають у вигляді двох складових ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  або  $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ ), напрямлених уздовж осей координат.



### 6. Жорстке защемлення (нерухоме закріплення).

При розв'язанні задач реакції защемлення зображають у вигляді двох складових ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ ) уздовж осей координат і пари сил з моментом  $M_A$ . Таким чином, защемлення дає три невідомі реакції.





## 1.6. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0.$$

Ці рівняння можна подати ще у двох формах, а саме:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0$$

(при цьому вісь ОХ не повинна бути перпендикулярною до прямої АВ) або

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) = 0$$

(при цьому точки А, В і С не повинні лежати на одній прямій).

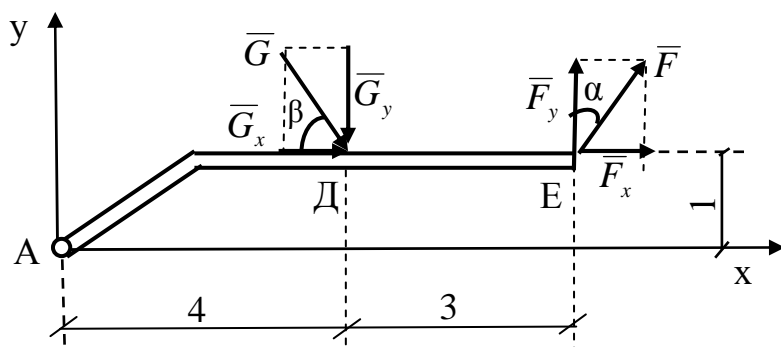
**Теорема Варіньйона для плоскої системи сил:** Якщо плоска система сил зводиться до рівнодійної, то її момент відносно будь-якої точки О площини дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно тієї ж точки:

$$M_0(\bar{R}) = \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i).$$

Цю теорему зручно використовувати для знаходження алгебраїчного моменту сили відносно точки, розкладаючи силу на складові, паралельні осям координат:

$$M_A(\bar{G}) = M_A(\bar{G}_x) + M_A(\bar{G}_y) = -G_x \cdot 1 - G_y \cdot 4;$$

$$M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}_x) + M_A(\bar{F}_y) = -F_x \cdot 1 + F_y \cdot 7,$$



де величини складо-

вих  $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{G}_x, \bar{G}_y$  :

$$F_x = F \cdot \sin \alpha,$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha,$$

$$G_x = G \cdot \cos \beta,$$

$$G_y = G \cdot \sin \beta.$$

### 1.7. Методика розв'язання задач статки

Послідовність дій при розв'язанні задачі на рівновагу твердого тіла має бути такою:

1) вибрати тіло, рівновагу якого треба розглянути, і зобразити його як вільне. Таким буде тіло, до якого прикладені задані сили та реакції в'язей, що визначаються в задачі;

2) зобразити осі координат;

3) показати всі діючі на тіло задані сили і реакції (їх звичайно направляють вздовж координатних осей) відкинутих в'язей.

Якщо є розподілені сили, замінити їх рівнодієюною;

4) скласти рівняння рівноваги;

5) розв'язати складені рівняння і проаналізувати одержані результати;

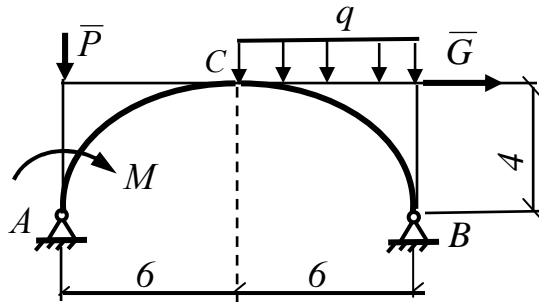
6) скласти перевірочне рівняння.

### 1.8. Рівновага системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язей (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

- 1) розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, які складають конструкцію;
- 2) початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

**Приклад.**



Дано:  $q = 2 \text{ кН/м}$

$M = 10 \text{ кН/м}$

$P = 5 \text{ кН}$

$G = 15 \text{ кН}$

Визначити:  $X_A - ? Y_A - ?$

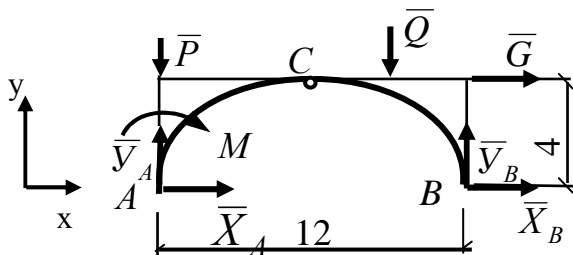
$X_B - ? Y_B - ?$

$X_C - ? Y_C - ?$

**Розв'язання:**

**Спосіб 1.**

1) Розрахункова схема всієї конструкції



$$Q = q \cdot 6 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (кН)},$$

Рівняння рівноваги:

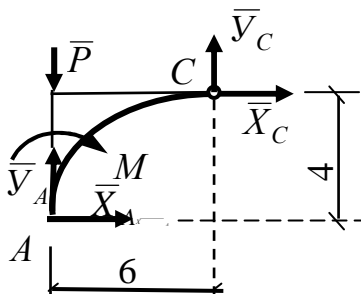
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + G + X_B = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B - Q - P = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0;$$

$$-G \cdot 4 + Y_B \cdot 12 - Q \cdot 9 - M = 0.$$

2) Розрахункова схема для тіла AC



Рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + X_C = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_C - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad Y_C \cdot 6 - X_C \cdot 4 - M = 0,$$

де  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  - реакції відкинутої правої частини конструкції.

З отриманих шести рівнянь рівноваги можна визначити 6 невідомих реакцій.

З третього рівняння

$$Y_B = \frac{G \cdot 4 + Q \cdot 9 + M}{12} = \frac{15 \cdot 4 + 12 \cdot 9 + 10}{12} = \frac{60 + 108 + 10}{12} = \frac{178}{12} \approx 14,83 \text{ (кН)},$$

з другого

$$Y_A = P + Q - Y_B = 5 + 12 - 4,83 \approx 2,17 \text{ (кН)},$$

з п'ятого

$$Y_C = P - Y_A = 5 - 2,17 \approx 2,83 \text{ (кН)},$$

з шостого

$$X_C = \frac{Y_C \cdot 6 - M}{4} = \frac{2,83 \cdot 6 - 10}{4} = \frac{17 - 10}{4} = 1,75 \text{ (кН)},$$

з четвертого

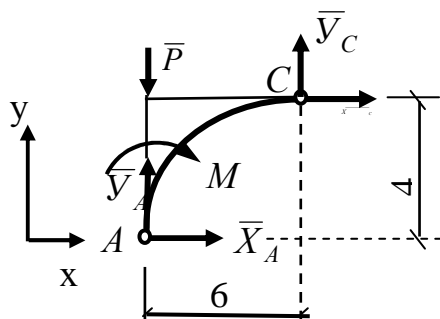
$$X_A = -X_C = -1,75 \text{ (кН)},$$

з першого

$$X_B = -X_A - G = -(-1,75) - 15 = 1,75 - 15 = -13,25 \text{ (кН)}.$$

## Спосіб 2

3) Розрахункова схема лівої частини складеної конструкції



Рівняння рівноваги:

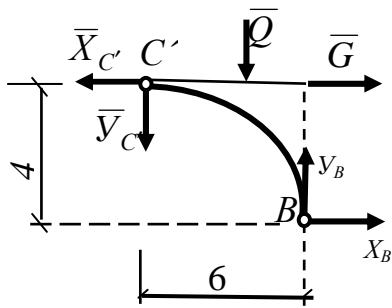
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + X_C = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -P + Y_A + Y_C = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0;$$

$$Y_C \cdot 6 - X_C \cdot 4 - M = 0$$

4) Розрахункова схема правої частини



Рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -X'_C + G + X_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad -Y'_C + Y_B - Q = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\bar{F}_i) = 0;$$

$$X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 6 - G \cdot 4 + Q \cdot 3 = 0,$$

де  $X'_C, Y'_C$  - реакції відкинutoї лівої частини конструкції, які (за аксіомою статички) рівні за модулем реакції  $X_C, Y_C$ :  $X'_C = X_C, Y'_C = Y_C$  та протилежно напрямлені.

Визначимо невідомі реакції.

Складемо третє і шосте рівняння:

$$Y_C \cdot 6 - \cancel{X_C \cdot 4} - M + \cancel{X'_C \cdot 4} + Y'_C \cdot 6 - G \cdot 4 + Q \cdot 3 = 0$$

$$Y_C \cdot 12 - M - G \cdot 4 + Q \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$Y_C = \frac{M + G \cdot 4 - Q \cdot 3}{12} = \frac{10 + 15 \cdot 4 - 12 \cdot 3}{12} = \frac{10 + 60 - 36}{12} = \frac{34}{12} \approx 2,83 \text{ (кН)},$$

з третього рівняння

$$X_C = \frac{Y_C \cdot 6 - M}{4} = \frac{17 - 10}{4} = 1,75 \text{ (кН)},$$

з першого

$$X_A = -X_C = -1,75 \text{ (кН)},$$

з другого

$$Y_A = P + Q - Y_B = 5 + 12 - 4,83 \approx 2,17 \text{ (кН)},$$

з п'ятого

$$Y_C = P - Y_A = 5 - 2,83 \approx 2,17 \text{ (кН)},$$

з четвертого

$$X_B = X'_C - G = 1,75 - 15 = -13,25 \text{ (кН)},$$

з п'ятого

$$Y_B = Y'_C + Q = 2,83 + 12 = 14,83 \text{ (кН)}.$$

Для перевірки визначених величин реакцій  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  треба розглянути всю конструкцію як вільне тіло (див. схему 1 у способі 1) і скласти рівняння моментів відносно точки, через яку не проходять лінії дій цих реакцій, наприклад відносно точки С:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_C(\bar{F}_i) &= P \cdot 6 - Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 4 + X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 6 - M - Q \cdot 3 = \\ &= 5 \cdot 6 - 2,17 \cdot 6 - 1,75 \cdot 4 - 13,25 \cdot 4 + 14,84 \cdot 6 - 10 - 12 \cdot 3 = \\ &= 30 - 13,02 - 7 - 53 + 88,98 - 10 - 36 = 118,98 - 119,02 = 0,04 \approx 0. \end{aligned}$$

*Відповідь:*  $X_A = -1,75 \text{ кН}; Y_A = 2,17 \text{ кН}; X_B = -13,25 \text{ кН}; Y_B = 14,83 \text{ кН};$

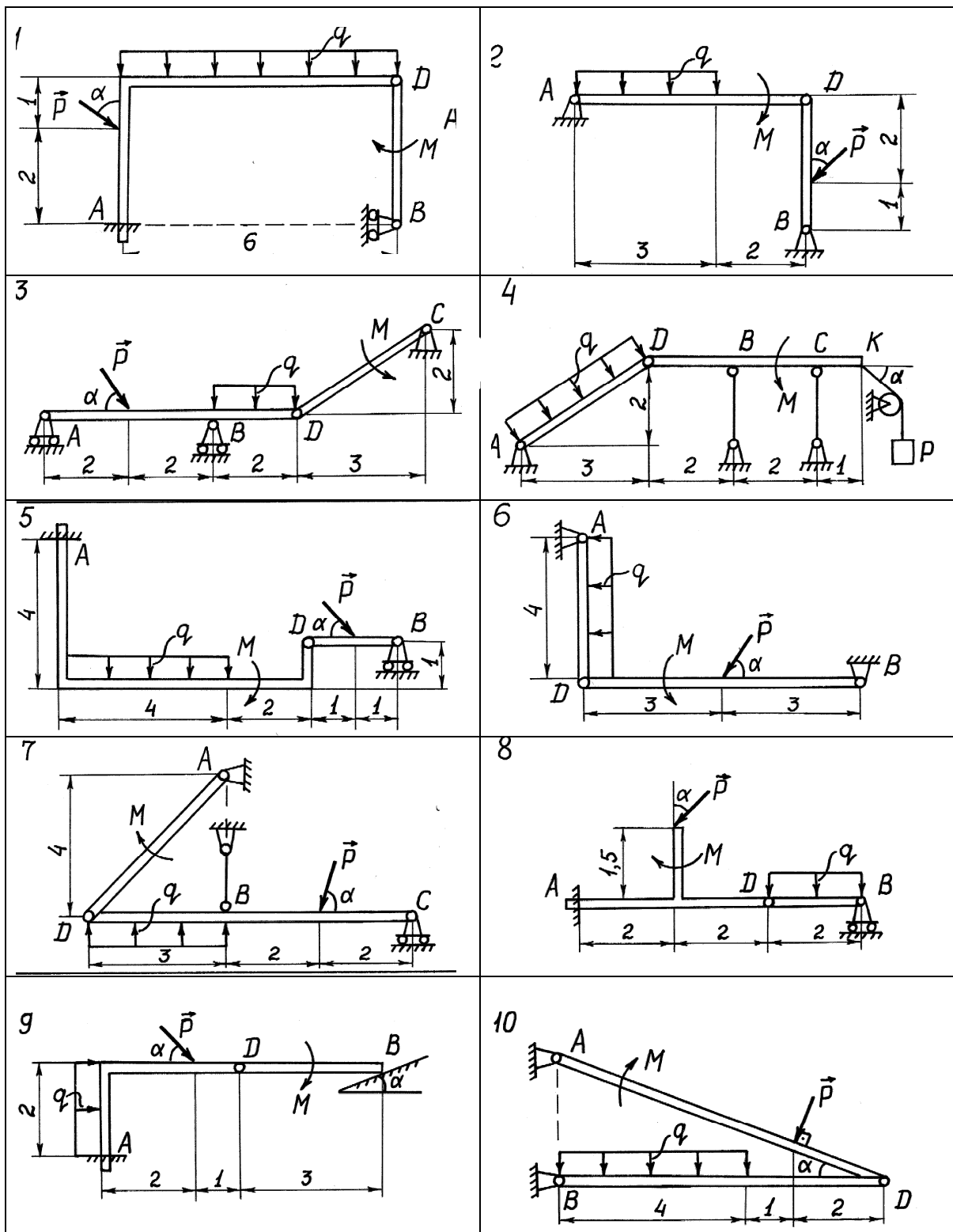
$$X_C = 1,75 \text{ кН}; Y_C = 2,83 \text{ кН}.$$

### **1.8.1. Завдання для роботи С1 «Визначення реакцій опор складеної конструкції»**

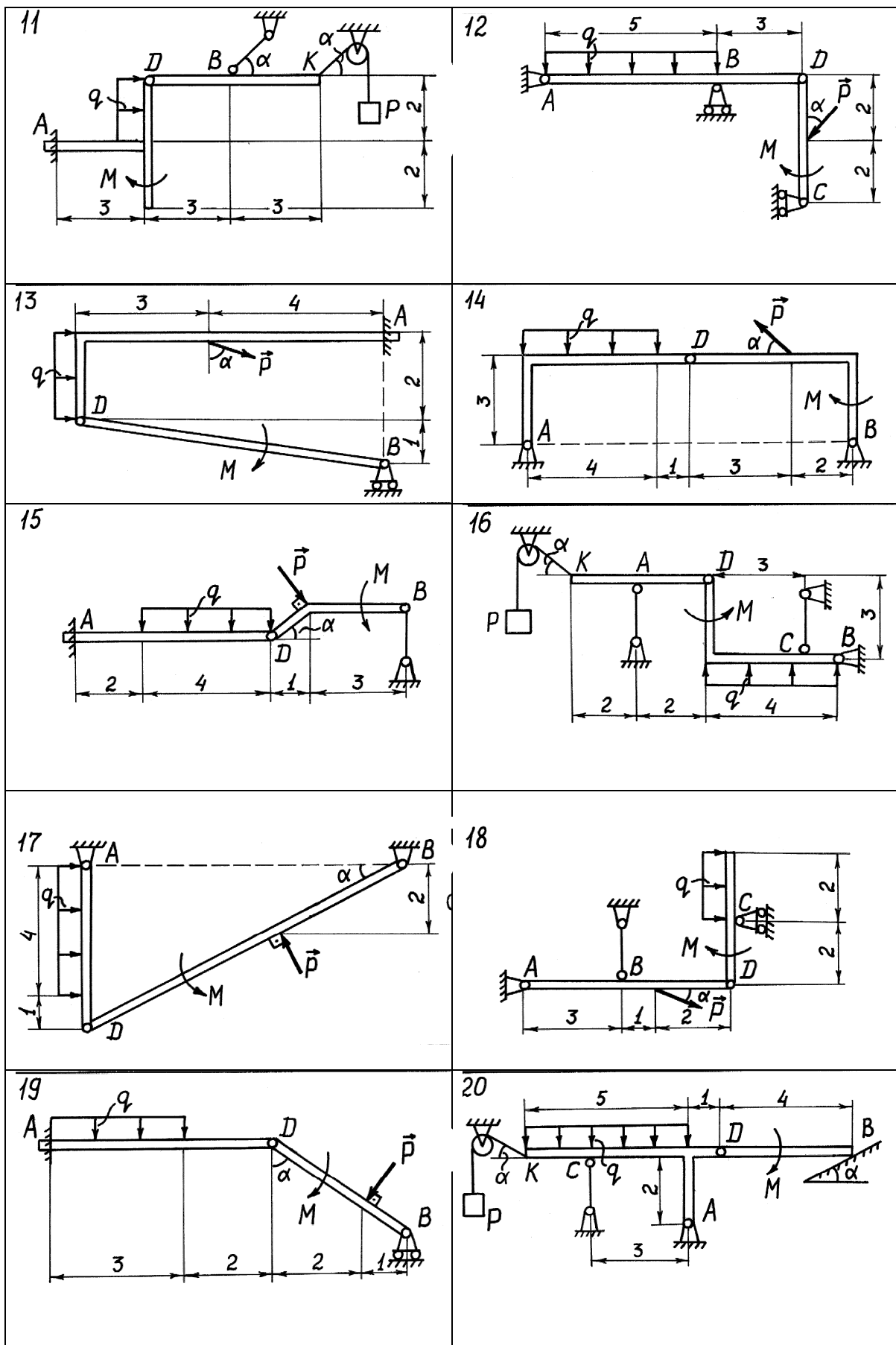
Визначити реакції опор і тиск у проміжному шарнірі складеної конструкції. Схеми конструкцій наведені на наступних сторінках, розміри задані в метрах. Значення сили  $P$ , кута  $\alpha$ , інтенсивності розподіленого навантаження  $q$  і пари сил  $M$  задаються.

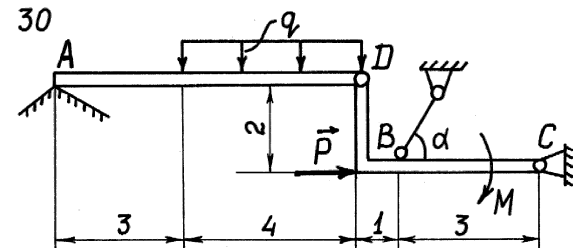
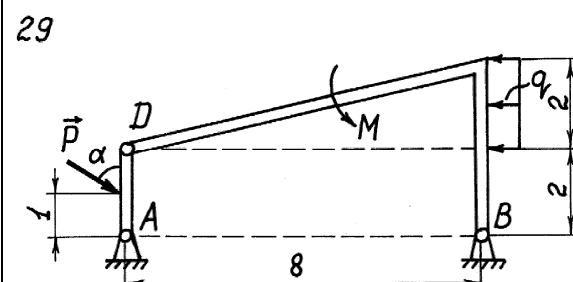
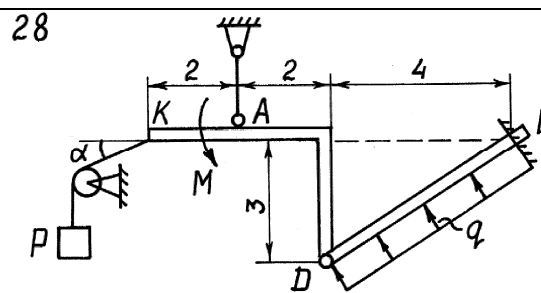
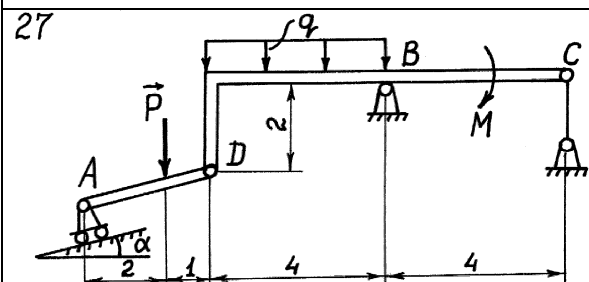
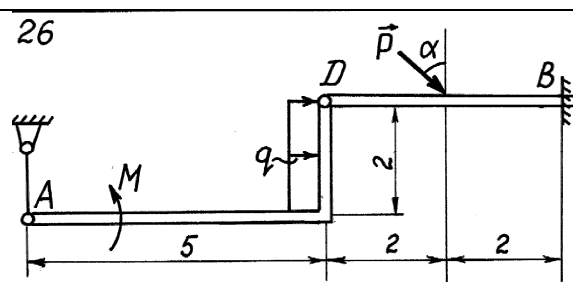
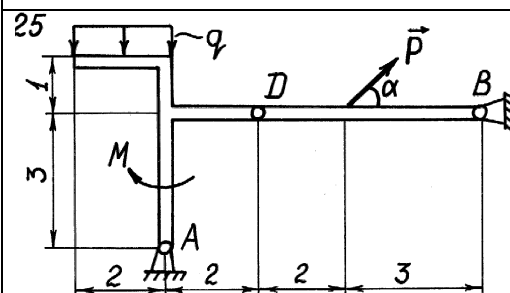
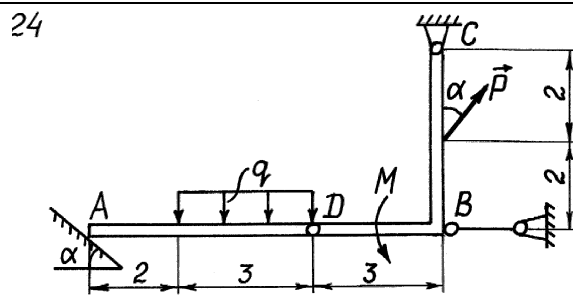
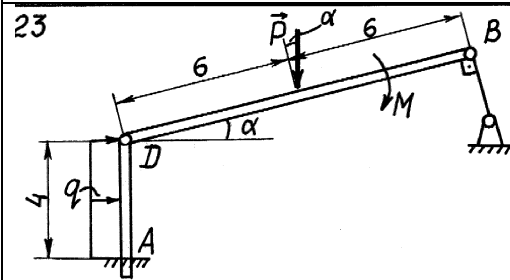
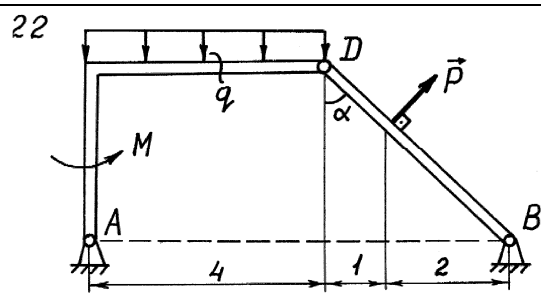
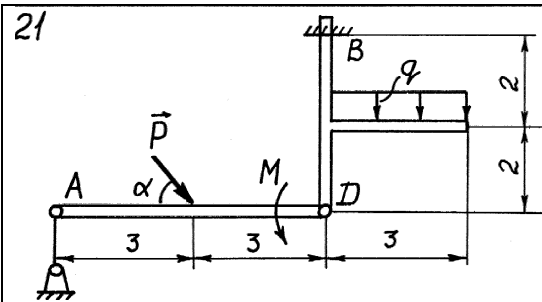
Варіанти навантажень для роботи С-1  
„Визначення реакцій опор складеної конструкції”

№ варіанта	$P$ , кН	$M$ , кНм	$q$ , кН/м	$\alpha$ , град.
1	10	20	1	60
2	12	10	4	60
3	8	5	2	45
4	14	8	5	30
5	6	7	3	45
6	10	4	2	60
7	7	5	1	60
8	15	6	4	45
9	12	8	6	45
10	10	4	5	30
11	6	6	0,5	45
12	4	9	2	45
13	8	8	4	60
14	6	6	3	45
15	10	10	5	45
16	14	4	2	30
17	15	10	0,5	30
18	11	6	1	30
19	6	9	0,5	45
20	12	8	3	30
21	10	5	1,5	45
22	8	14	1	45
23	14	9	2	30
24	8	7	4	45
25	6	5	3,5	45
26	10	12	1	30
27	15	7	2	30
28	12	12	3	30
29	10	14	2	60
30	15	10	3	60









### 1.9. Розрахунок плоскої ферми

*Плоска ферма* - жорстка конструкція, складена з прямолінійних стержнів, які розташовані в одній площині і з'єднуються між собою і з опорами за допомогою шарнірів. Шарніри називають *вузлами* ферми.

#### **Основні припущення:**

- 1) усі зовнішні навантаження на ферму прикладені тільки у вузлах;
- 2) вагою стержнів (у порівнянні із зовнішніми навантаженнями) і тертям у вузлах нехтують.

Тоді можна вважати, що стержні ферми працюють тільки на розтяг або стиск. Розрахунок ферми зводиться до визначення опорних реакцій і зусиль у її стержнях.

#### **Порядок розрахунку ферми:**

- 1) визначити реакції опор ферми, розглядаючи останню в цілому як тверде тіло. Після визначення реакцій опор обов'язково треба скласти перевірочне рівняння;

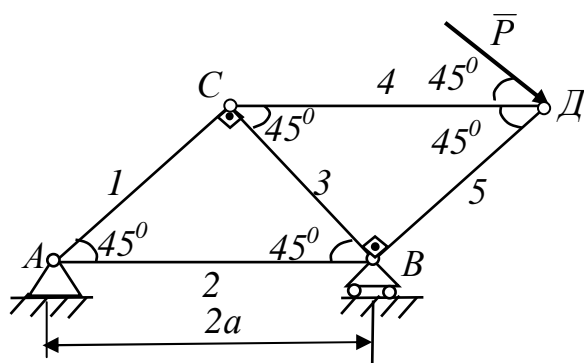
- 2) визначити зусилля у стержнях ферми одним з методів:

а) **Метод вирізання вузлів.** Цим методом зручно користуватись, якщо треба знайти зусилля в усіх стержнях ферми. Він зводиться до послідовного розглядання умов рівноваги збіжних сил, прикладених до кожного з вузлів. При цьому кількість невідомих зусиль у вузлі не повинна перевищувати двох. Для певності припускають, що всі зусилля направлені від вузла (тобто стержні розтягнуті). Останній вузол розглядають, як правило, для перевірки;

б) **Метод Ріттера.** Цим методом зручно користуватись, якщо треба знайти зусилля в окремих стержнях ферми, зокрема, для перевірочних

розрахунків. Згідно з цим методом ферму розділяють на дві частини перерізом, який проходить не більше, ніж через три стержні, і розглядають рівновагу однієї з частин. Зусилля в перерізаних стержнях напрямляють від перерізу (тобто припускають, як і в методі вирізання вузлів, що всі стержні розтягнуті). Далі складають рівняння рівноваги так, щоб у кожне рівняння увійшло тільки одне зусилля стержня, через який пройшов переріз. Для цього складають або рівняння моментів відносно точки площини (а не тільки ферми), через яку проходять лінії дій зусиль двох інших стержнів, які потрапили в переріз, або складають рівняння проекцій сил, якщо два інших стержні перерізу паралельні, на вісь, яка перпендикулярна до цих паралельних стержнів.

### Приклад.



Дано:

$$P=10 \text{ кН}$$

Визначити:

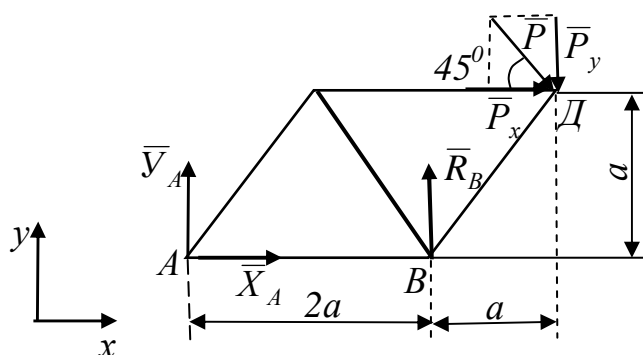
$$1) X_A - ? Y_A - ? R_B - ?$$

$$2) S_i - ? (i=1, \dots, 5)$$

$$3) S_2, S_3, S_4 - ?$$

Розв'язання:

1) Розглянемо рівновагу ферми і визначимо реакції опор А і В:



Величини складових сили  $\bar{P}$ :

$$P_x = P \cdot \cos 45^\circ,$$

$$P_y = P \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; X_A + P \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow X_A = -P \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad R_B \cdot 2a - P_y \cdot 3a - P_x \cdot a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{P_y \cdot 3 + P_x \cdot 1}{2} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 3 + 5\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B - P \sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow$$

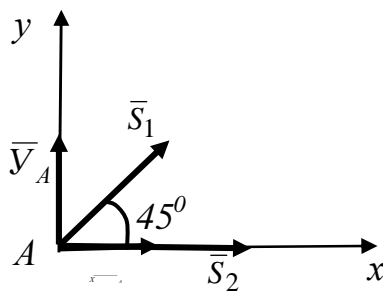
$$\Rightarrow Y_A = P \sin 45^\circ - R_B = 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \approx -7 \text{ (кН)}.$$

Перевірка:  $\sum_{i=1}^n M_D(\bar{F}_i) = -Y_A \cdot 3a + X_A \cdot a - R_B \cdot a =$

$$= -(-5\sqrt{2}) \cdot 3a + (-5\sqrt{2}) \cdot a - 10\sqrt{2} \cdot a = a(15\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2}) = a \cdot 0 = 0.$$

2) Визначимо зусилля у стержнях ферми методом вирізання вузлів:

а) розглянемо рівновагу вузла А:



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad S_1 \sin 45^\circ + Y_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 = -\frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = -\frac{(-5\sqrt{2})}{\sqrt{2}/2} = 10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_1 \cdot \cos 45^\circ + X_A + S_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

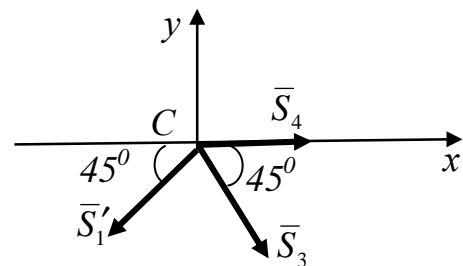
$$S_2 = -X_A - S_1 \cdot \cos 45^\circ = -(-5\sqrt{2}) - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0;$$

б) розглянемо рівновагу вузла С:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0;$$

$$-S_1 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{кН});$$

$$\Rightarrow S_3 = -S_1 = -10$$



$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_1 \cdot \cos 45^\circ + S_3 \cos 45^\circ + S_4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S_4 = S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)};$$

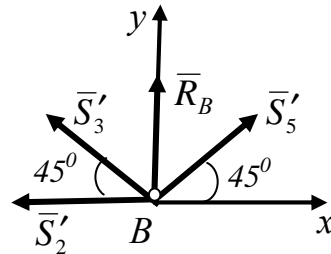
(за модулем  $\bar{S}'_1 = S_1 = 10 \text{ кН}$ );

в) розглянемо рівновагу вузла В:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$-S_2 - S_3 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S_5 = \frac{S_2 + S_3 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{0 - 10 \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -10 \text{ (кН)};$$



друге рівняння  $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$  можна використати для перевірки:

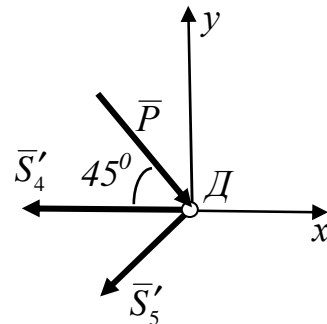
$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -S_3 \cdot \sin 45^\circ + R_B + S_5 \sin 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0; \quad (S'_2 = S_2; S'_3 = S_3);$$

г) для перевірки вірності розрахунків розглянемо останній вузол Д:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad -S_4 - S_5 \cos 45^\circ + P \cos 45^\circ =$$

$$= -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = -10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

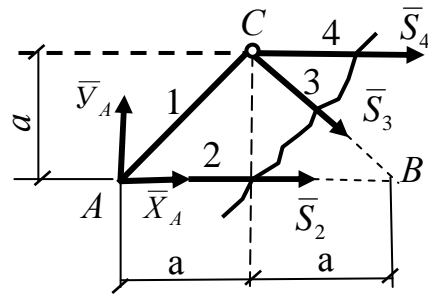


$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = -P \cdot \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ = -10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-10) \frac{\sqrt{2}}{2} = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 0;$$

( $S'_4 = S_4; S'_5 = S_5$ );

3) Визначимо зусилля у стержнях 2, 3, 4 ферми методом Ріттера. Для

цього проведемо переріз через ці стержні і розглянемо рівновагу, наприклад, лівої частини ферми:



$$\sum_{i=1}^n \overline{M}_C(\overline{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot a + X_A \cdot a + S_2 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S_2 = Y_A - X_A = -5\sqrt{2} - (-5\sqrt{2}) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - S_3 \sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{Y_A}{\sin 45^\circ} = \frac{-5\sqrt{2}}{\sqrt{2}/2} = -10 \text{ (кН)};$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\overline{F}_i) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a - S_4 \cdot a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$S_4 = 2Y_A = -2(-5\sqrt{2}) = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ (кН)}.$$

*Відповідь:* 1)  $X_A \approx -7$  кН;  $Y_A \approx -7$  кН;  $R_B = 14$  кН; знаки «-» означають, що справжнє напрямлення складових  $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$  протилежне показаним на рисунку;

2)  $S_1 = 10$  кН;  $S_2 = 0$ ;  $S_3 = -10$  кН;  $S_4 \approx 14$  кН;  $S_5 = -10$  кН; стержні 1, 2 - розтягнуті; 3, 5 - стиснуті; 2 - не навантажений.

### 1.9.1. Завдання для роботи С2 «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми»

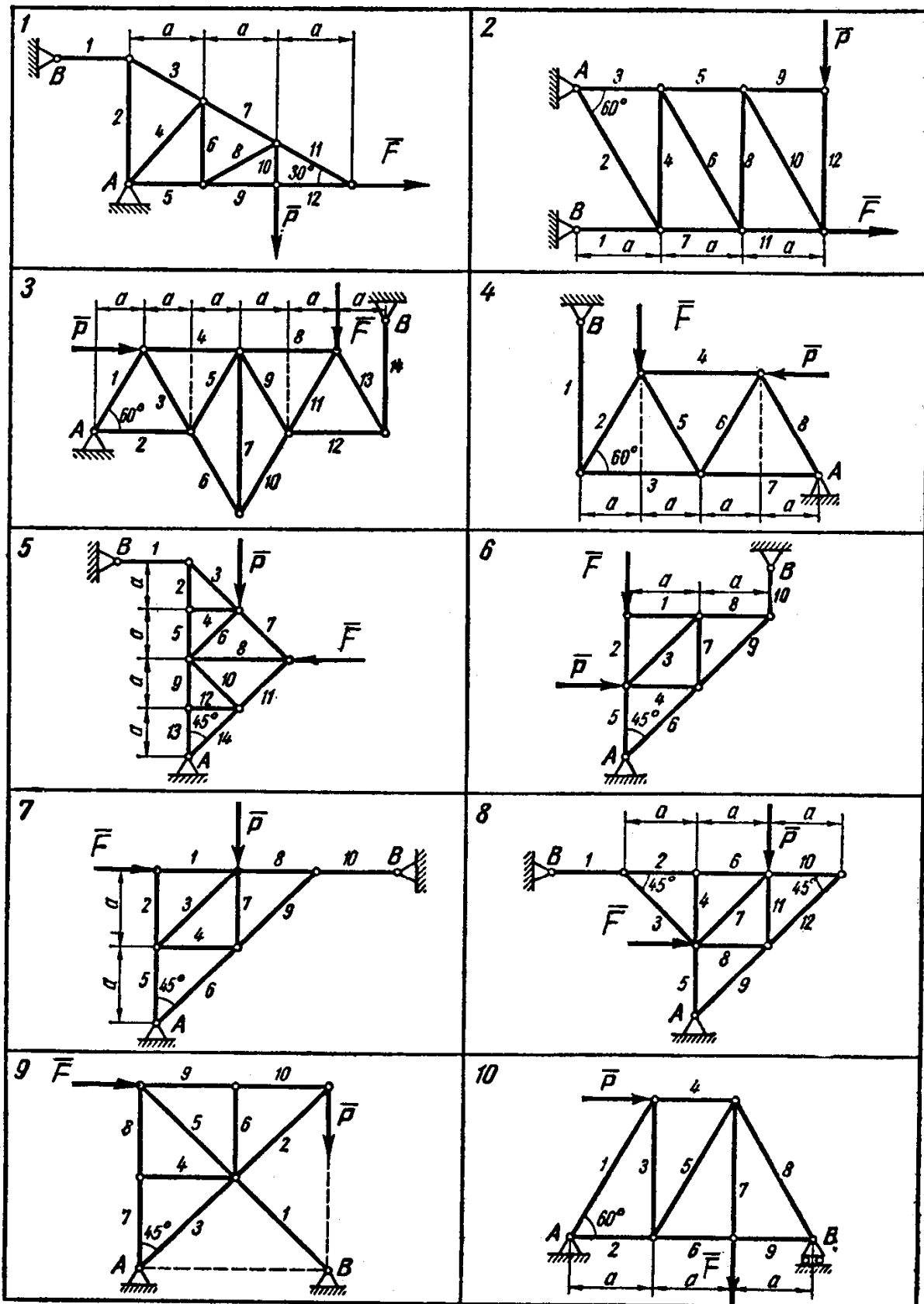
Визначити реакції опор ферми, а також зусилля в усіх її стержнях методом вирізання вузлів. Додатково перевірити зусилля у трьох стержнях методом Ріттера. Вагою знехтувати. Схеми ферм наведені на наступних сторінках. Значення зовнішніх сил  $P, F$  і номери стержнів для перевірки методом Ріттера задаються.

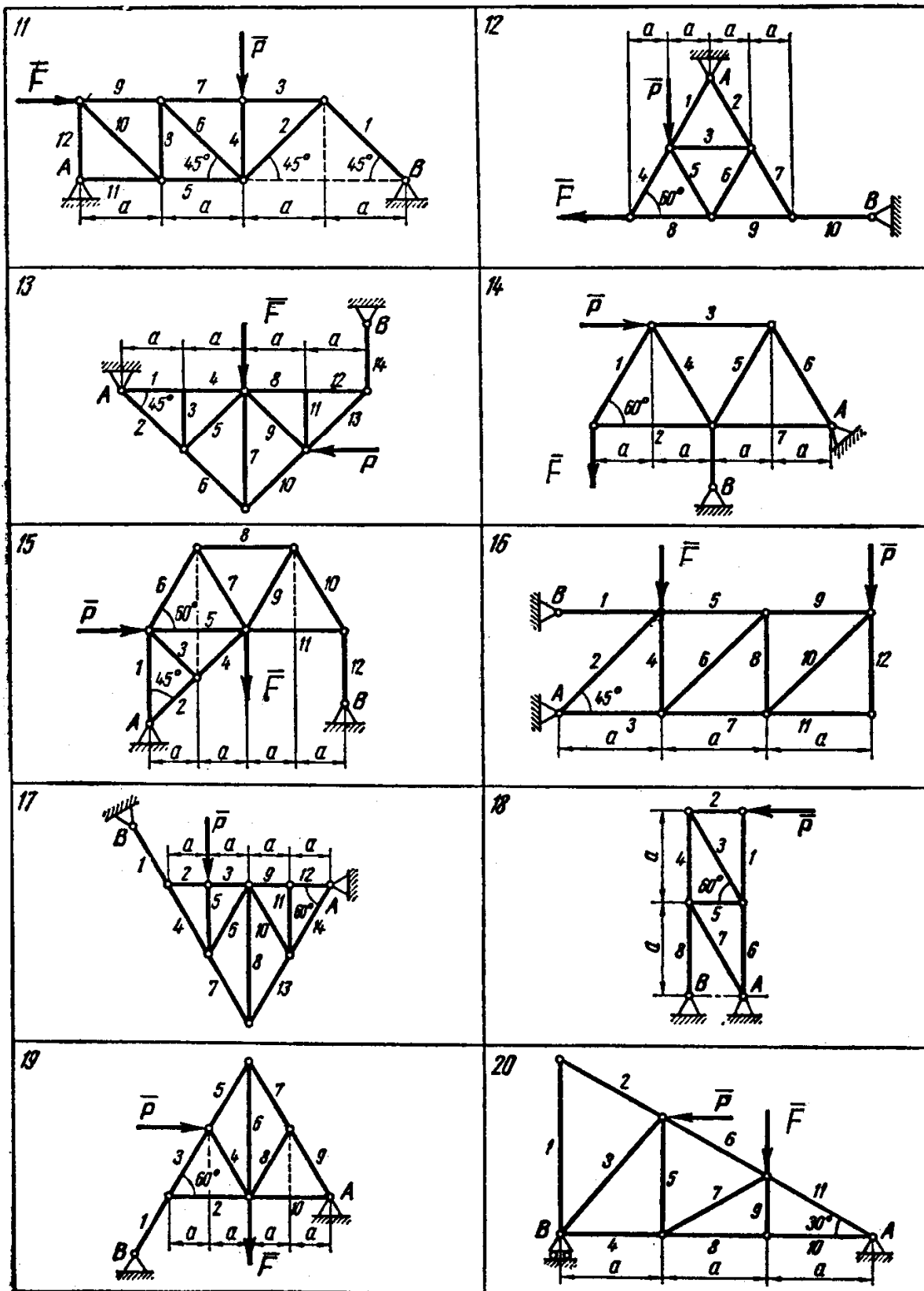
## Варіанти навантаження для роботи С-2

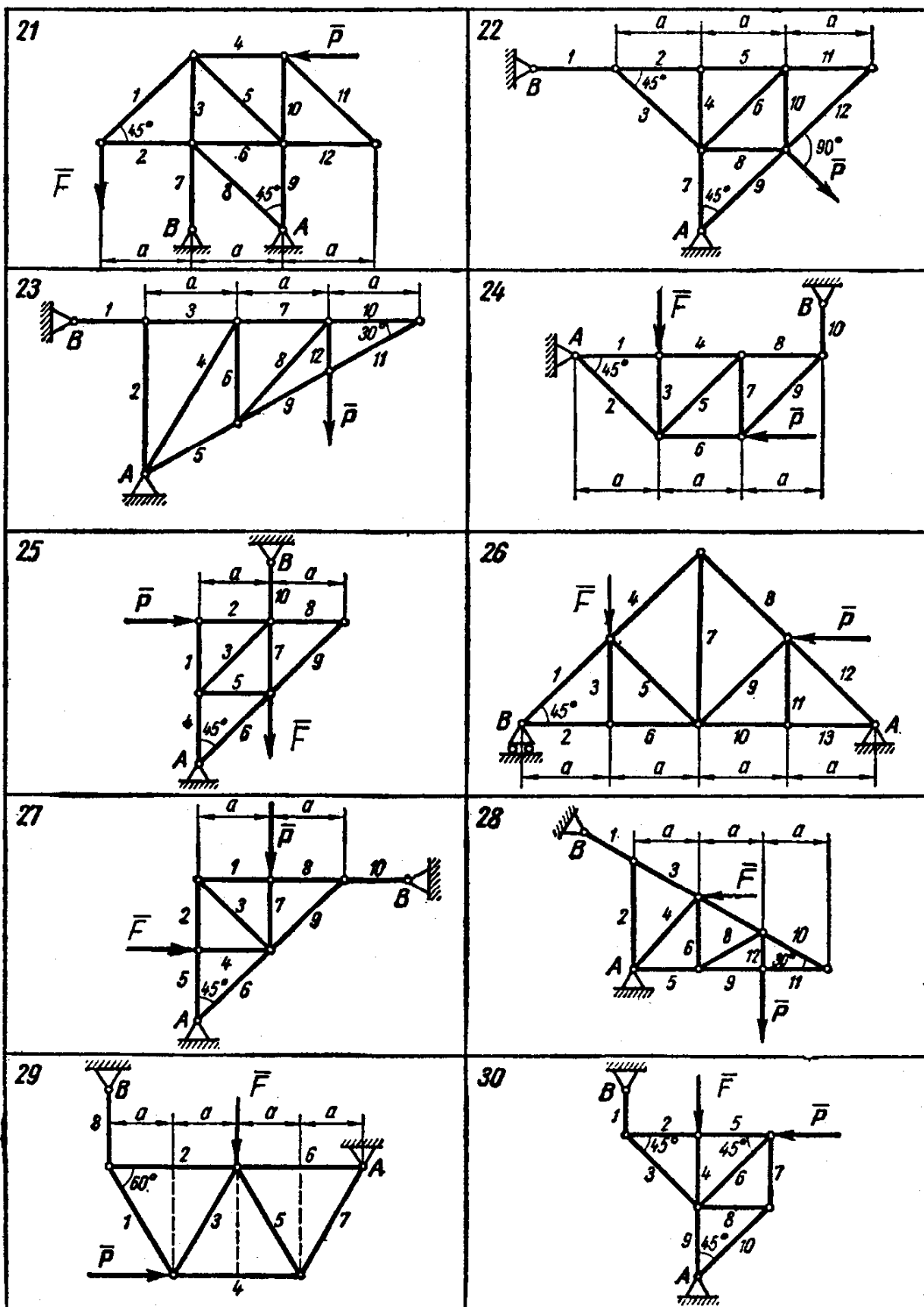
„Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми”

№ варіанта	$P$ , кН	$F$ , кН	$a$ , м
1	5	20	3
2	5	10	4
3	10	5	2
4	10	30	3
5	5	15	2
6	10	20	4
7	5	10	4
8	10	20	4
9	20	30	3
10	20	10	6
11	10	20	4
12	30	10	3
13	10	10	4
14	15	10	4
15	20	10	2
16	40	20	6
17	30	-	2
18	10	-	6
19	10	40	3
20	10	10	5
21	10	20	3
22	20	20	3
23	10	-	3
24	10	20	5
25	20	15	6
26	15	10	4
27	20	10	4
28	20	20	3
29	10	20	3
30	10	10	6





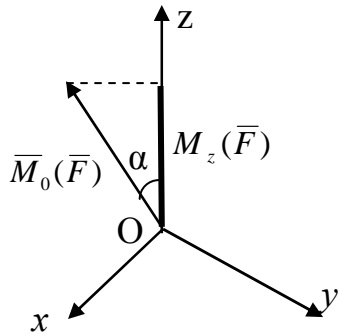




## 2. РІВНОВАГА ПРОСТОРОВОЇ СИСТЕМИ СИЛ

### 2.1. Момент сили відносно осі

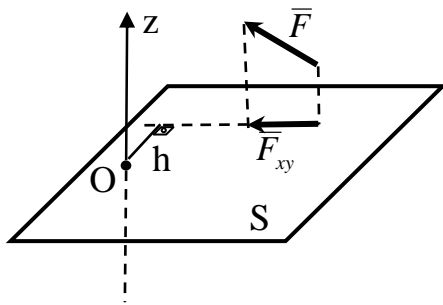
Моментом сили відносно осі  $z$  називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно точки  $O$ , що лежить на осі:



$$M_z(\bar{F}) = [\bar{M}_0(\bar{F})]_z = M_0(\bar{F}) \cdot \cos \alpha.$$

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі.

Правило визначення моменту сили  $\bar{F}$  відносно осі  $z$ :



1. Провести площину  $S$ , перпендикулярну до осі  $z$ , і знайти точку перетину осі з площиною  $O$ .

2. Спроектувати силу на проведену площину ( $\bar{F}_{xy}$  - проекція сили  $\bar{F}$  на площину).

3. Знайти момент сили  $\bar{F}_{xy}$  відносно точки  $O$  перетину осі з площиною  $S$ :

$$M_0(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Взяти знак «+», якщо з додатного кінця осі  $z$  видно, що сила  $\bar{F}_{xy}$  прагне обертати площину  $S$  навколо осі проти руху годинникової стрілки, і знак «-», якщо за стрілкою годинника.

$$M_z(\bar{F}) = M_0(\bar{F}_{xy})$$

У нашому випадку  $M_z(\bar{F}) = F_{xy} \cdot h.$

**Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:**

а) сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили на площину  $\bar{F}_{xy} = 0$ );

б) лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече  $h = 0$ ).

## **2.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил**

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи одночасно дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_0 = 0,$$

або суми проекцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i) = 0.$$

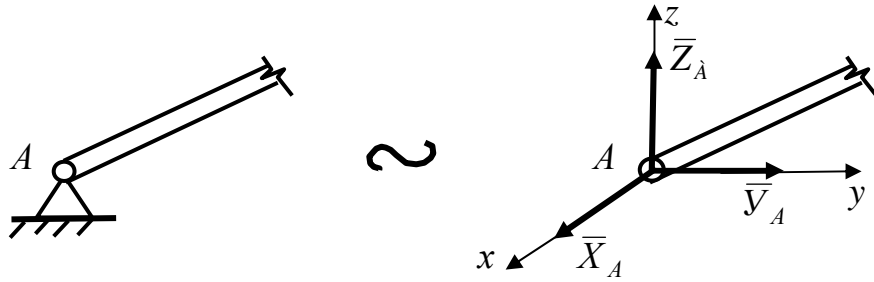
## **2.3. Види в'язей у просторі і напрям їх реакцій**

1. Для ідеальної гладенької поверхні, нитки, ідеального стержня, рухомого шарніра реакції зображуються за тими ж правилами, як і у площині (дивись розділ 1.5).

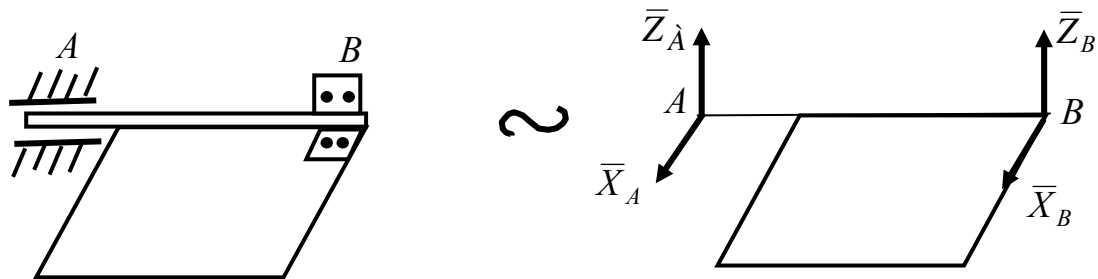
### **2. Нерухомий (сферичний) шарнір**

Реакція проходить через вісь шарніра і може мати будь-яке напрямлення у просторі. При розв'язанні задач реакції зображують у вигляді

трьох складових ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ ), напрямлених уздовж осей координат.



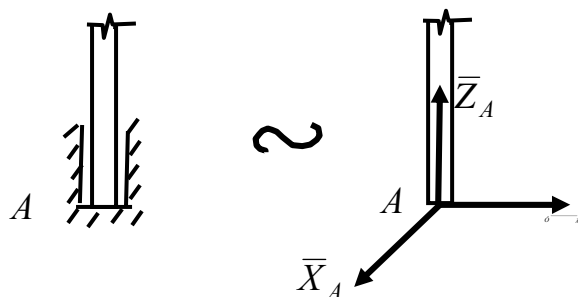
### 3. Підшипник (трубка) (A), петля (B).



Реакція підшипника і петлі лежить у площині, перпендикулярній до осі підшипника або петлі (пряма AB), і можуть мати будь-яке напрямлення у цій площині. При розв'язанні задач реакції зображують у вигляді двох складових ( $\bar{X}_A, \bar{Z}_A$  або  $\bar{X}_B, \bar{Z}_B$ ) уздовж осей координат, які перпендикулярні до осі підшипника (петлі).

### 4. Підп'ятник (закрита з одного боку трубка).

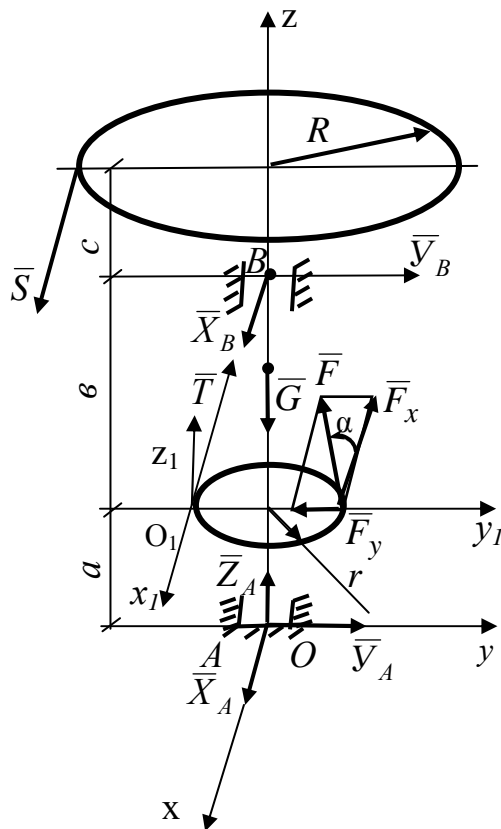
Реакція підп'ятника може мати будь-яке напрямлення у просторі. При



розв'язанні задач реакцію зображують у вигляді трьох складових ( $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ ), дві з яких перпендикулярні до осі підп'ятника, а одна напрямлена уздовж його осі від закритого боку трубки.

## 2.4. Визначення реакцій опор твердого тіла

Приклад.



$$T = 4 \text{ кН}, \quad F = 2 \text{ кН}, \quad G = 3 \text{ кН},$$

$$\alpha = 30^\circ, \quad R = a = c = 15 \text{ см}, \quad b = 20 \text{ см},$$

$$r = 10 \text{ см}, \quad \bar{S}, \bar{T} \text{ и } \bar{F} \perp O_z$$

$$X_A - ?, \quad Y_A - ?, \quad Z_A - ?,$$

$$X_B - ?, \quad Y_B - ?, \quad Z_B - ?, \quad S - ?$$

Розв'язання:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S + X_B - T - F_x + X_A = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_B - F_y + Y_A = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad Z_A - G = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0x}(\bar{F}_i) = 0; \quad F_y \cdot a - Y_B \cdot (a + b) = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0y}(\bar{F}_i) = 0; \quad S \cdot (a + b + c) + X_B(a + b) - T \cdot a - F_x \cdot a = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n M_{0z}(\bar{F}_i) = 0; \quad S \cdot R - T \cdot r + F_x \cdot r = 0. \quad (6)$$

З отриманих шести рівнянь рівноваги можна визначити шість невідомих реакцій, враховуючи, що  $F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,732 \text{ (кН)}$ ,

$$F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ (кН)}:$$

з шостого рівняння

$$S = \frac{T \cdot r - F_x \cdot r}{R} = \frac{4 \cdot 10 - 1,732 \cdot 10}{15} = \frac{40 - 17,32}{15} = \frac{22,68}{15} \approx 1,512 \text{ (кН)};$$

з п'ятого

$$X_B = \frac{T \cdot a + F_x \cdot a - S \cdot (a + b + c)}{a + b} = \frac{4 \cdot 15 + 1,732 \cdot 15 - 1,512 \cdot 50}{35} = \\ = \frac{60 + 25,98 - 75,5}{35} = \frac{10,32}{35} \approx 0,297 \text{ (кН)};$$

з четвертого

$$Y_B = \frac{F_y \cdot a}{a + b} = \frac{1 \cdot 15}{15 + 20} = 0,425 \text{ (кН)};$$

з третього  $Z_A = G = 3 \text{ (кН)}$ ;

з другого  $Y_A = F_y - Y_B = 1 - 0,429 = 0,571 \text{ (кН)}$ ;

з першого  $X_A = T + F_x - S - X_B = 4 + 1,732 - 1,512 - 0,297 \approx 3,923 \text{ (кН)}$ .

Для перевірки одержаних величин реакцій в'язей можна скласти рівняння моментів відносно осей системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ , осі якої є паралельними осям початкової системи координат  $Oxyz$ .

*Наприклад:*

$$\sum_{i=1}^n M_{O_1x_1}(\bar{F}_i) = Y_A \cdot a + Z_A \cdot r - Y_B \cdot b - G \cdot r = \\ = 0,571 \cdot 15 + 3 \cdot 10 - 0,429 \cdot 20 - 3 \cdot 10 = 8,565 - 8,58 = -0,015 \approx 0; \\ \sum_{i=1}^n M_{O_1y_1}(\bar{F}_i) = S \cdot (c + b) + X_B \cdot b - X_A \cdot a = \\ = 1,512 \cdot 35 + 0,297 \cdot 20 - 3,923 \cdot 15 = 58,86 - 58,845 = 0,015 \approx 0.$$

*Відповідь:*  $X_A = 3,923 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 0,571 \text{ кН}$ ,  $Z_A = 3 \text{ кН}$ ,  
 $X_B = 0,297 \text{ кН}$ ,  $Y_B = 0,429 \text{ кН}$ ,  $S = 1,512 \text{ кН}$ .

#### **2.4.1.Завдання для роботи СЗ «Визначення реакцій опор твердого тіла»**

Визначити реакції опор конструкції. Схеми конструкцій наведені на наступних сторінках. Значення зовнішніх сил  $Q$ ,  $T$ ,  $U$ , а також розміри  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $r$ ,  $R$  задаються.

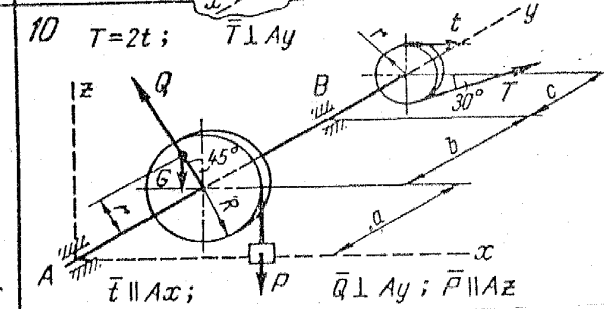
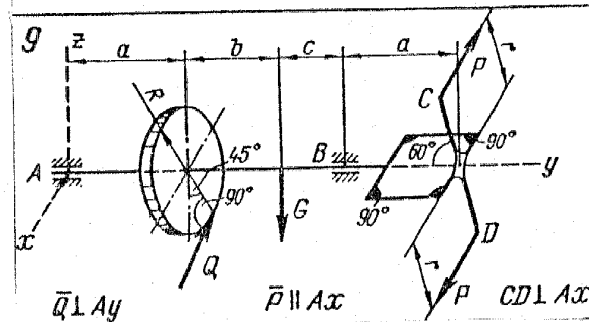
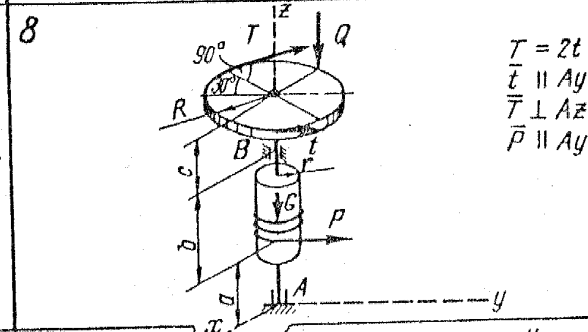
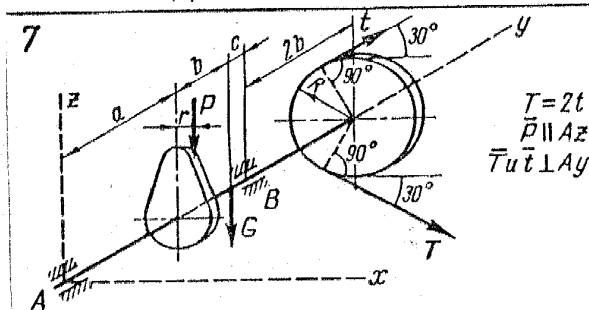
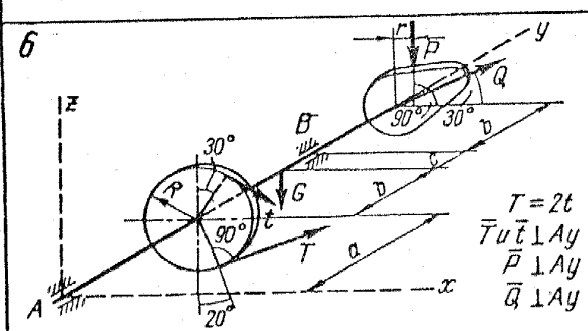
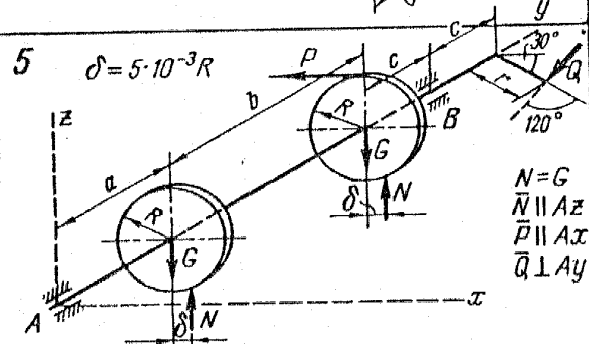
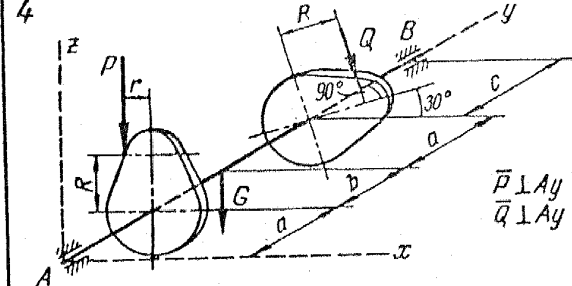
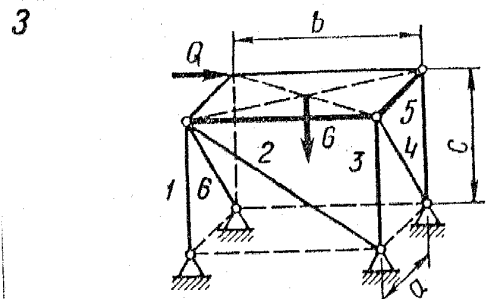
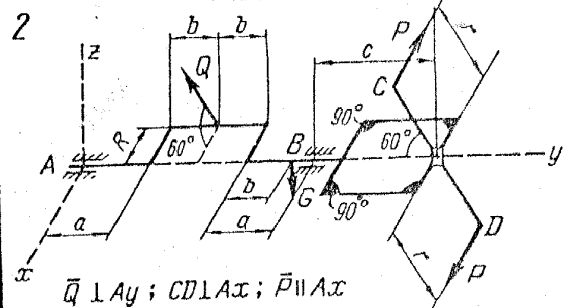
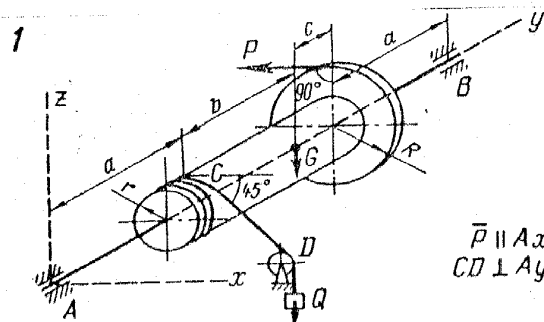
Примітка. 1. Вважати, що у варіантах 16, 18, 22-27, 30 петлі не заважають переміщенню рами уздовж АВ.

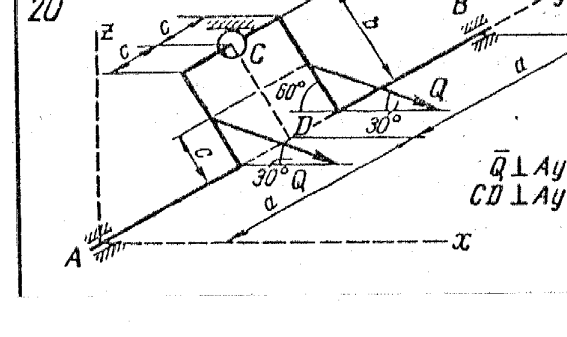
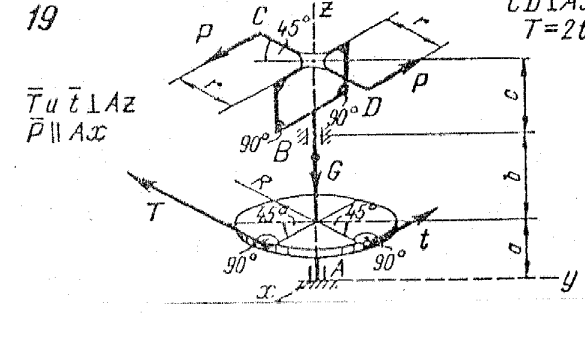
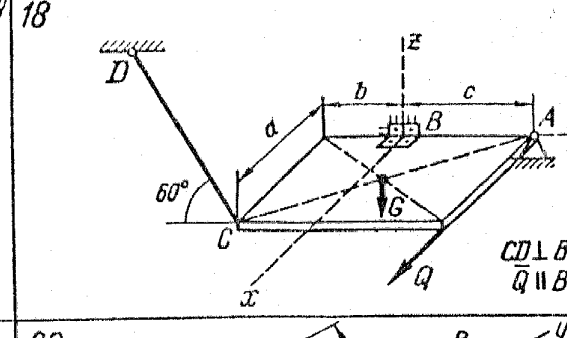
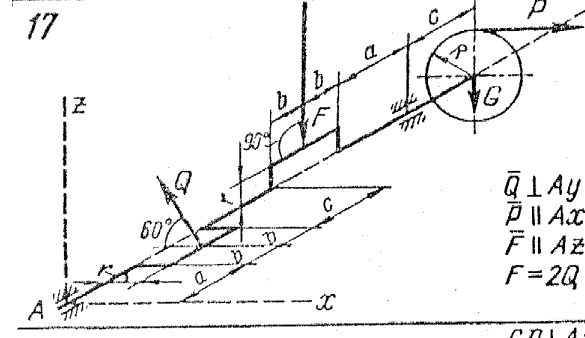
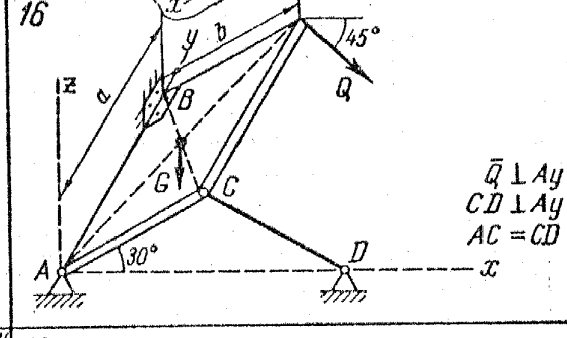
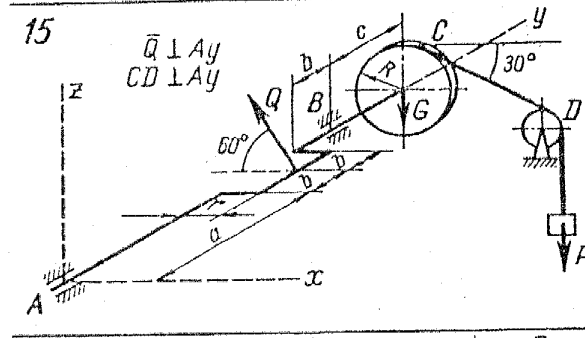
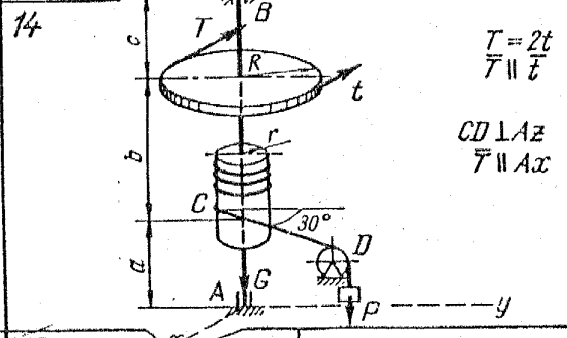
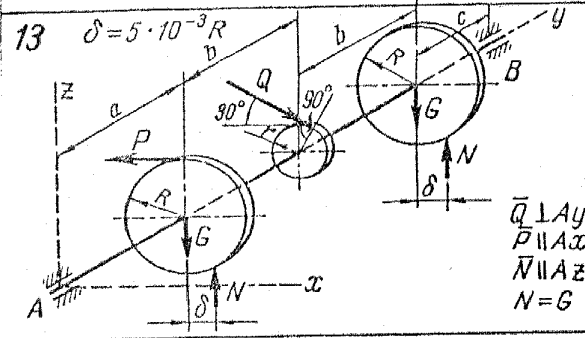
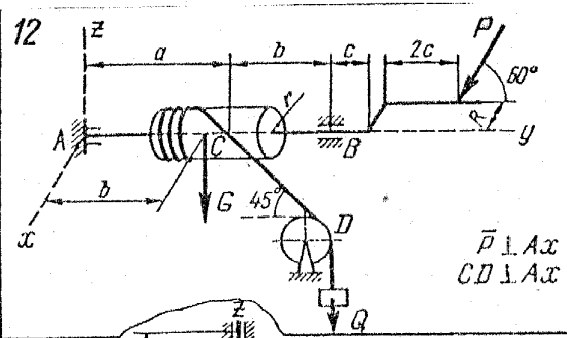
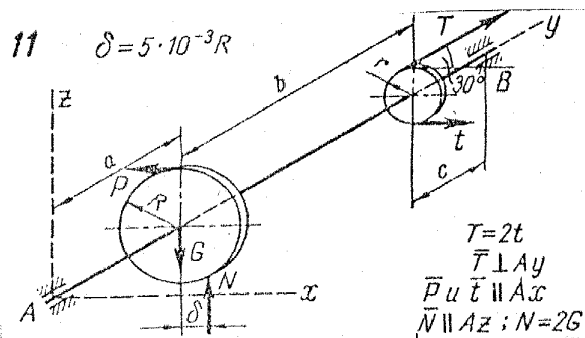


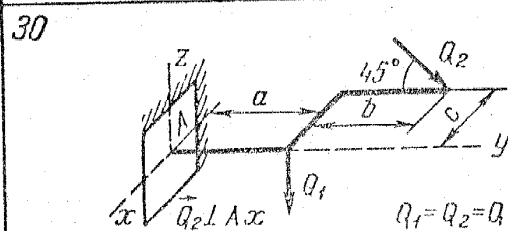
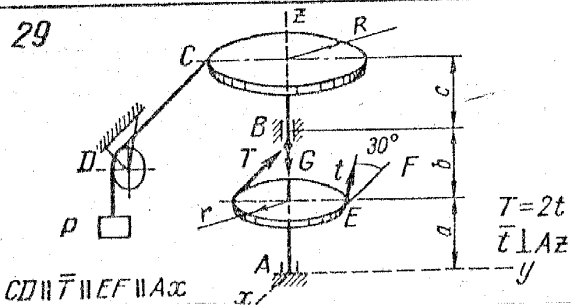
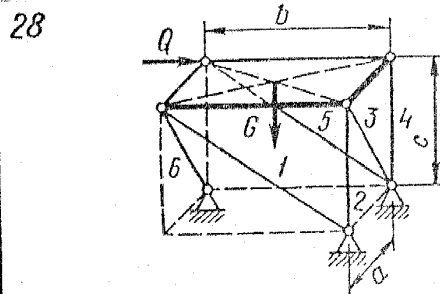
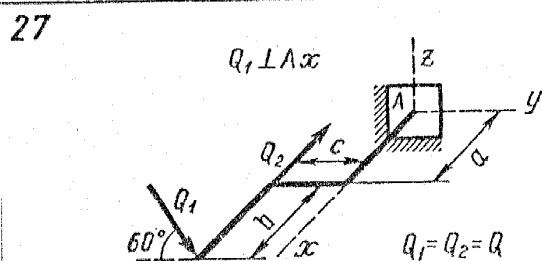
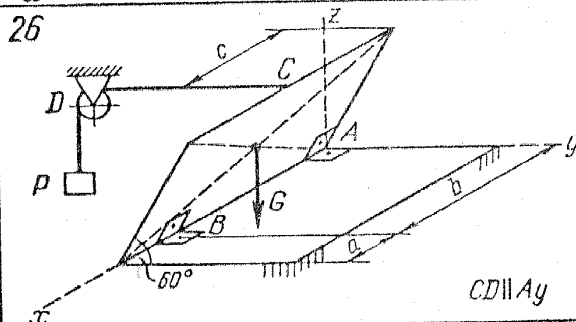
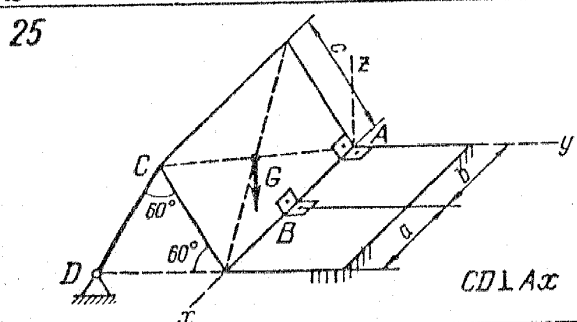
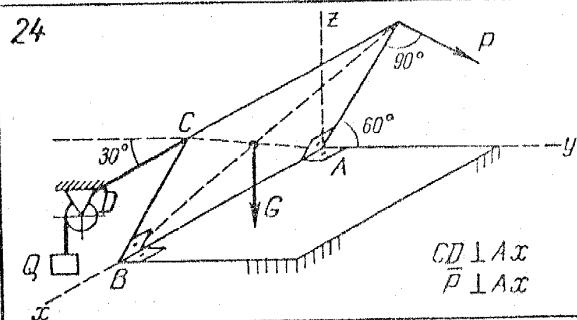
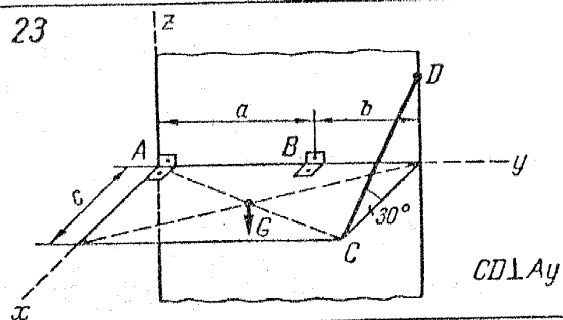
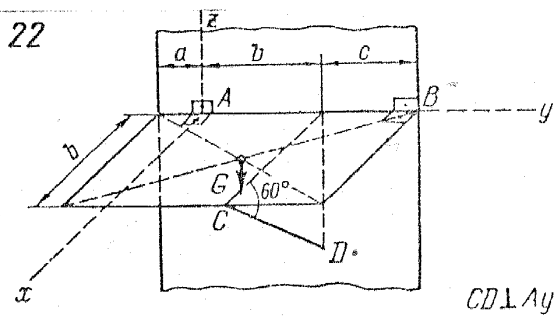
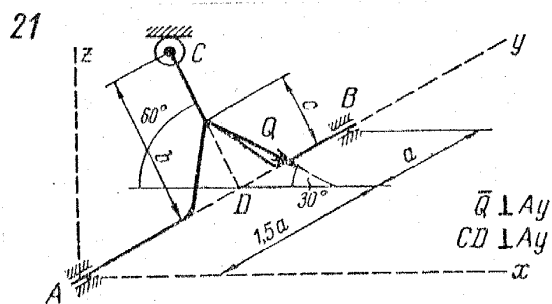
2. У варіантах 20, 21, 28 поверхні, які торкаються, вважати абсолютно гладенькими.

Варіанти навантажень для роботи С-3  
„Визначення реакцій опор твердого тіла”

№ вар.	Сили, кН			Розміри, см				
	$Q$	$P$	$G$	$a$	$b$	$c$	$R$	$r$
1	2	12	20	20	30	10	15	5
2	4	8	2	20	10	30	10	10
3	6	-	4	15	15	20	-	15
4	3	4	2	30	20	40	15	10
5	5	8	3	30	40	20	20	15
6	1	4	2	40	30	20	20	10
7	-	3	1	30	10	5	18	6
8	4	6	3	20	40	15	20	10
9	5	8	3	20	15	10	30	40
10	1	4	2	30	40	20	20	10
11	-	2	1	20	30	15	15	10
12	4	2	1	25	20	8	15	10
13	10	4	5	40	30	20	25	15
14	-	2	1	30	90	20	30	10
15	3	5	2	60	20	40	20	5
16	4	-	2	50	30	-	-	-
17	2	-	1	15	10	20	20	5
18	6	-	2	60	40	60	-	-
19	-	8	2	20	30	40	20	15
20	4	-	-	60	40	20	-	-
21	2	-	-	40	60	30	-	-
22	-	-	5	20	50	30	-	-
23	-	-	4	40	30	50	-	-
24	5	-	2	-	-	-	-	-
25	-	-	3	50	50	60	-	-
26	-	4	1	20	60	40	-	-
27	-	-	1	50	30	10	-	-
28	2	-	6	30	10	50	-	-
29	-	4	3	15	20	15	15	10
30	-	-	4	40	30	10	-	-

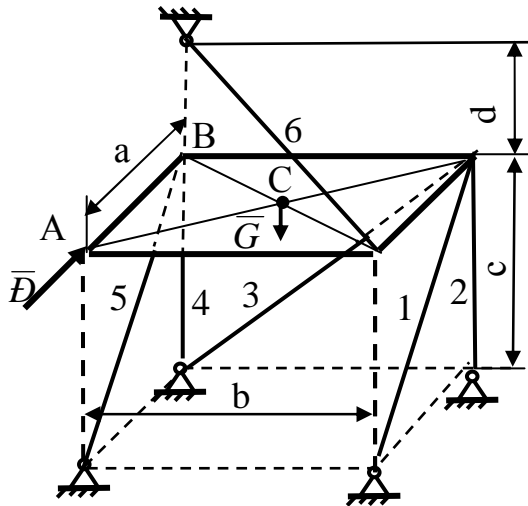






## 2.5. Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту

*Приклад.*



$$G = 6 \text{ кН}, P = 10 \text{ кН},$$

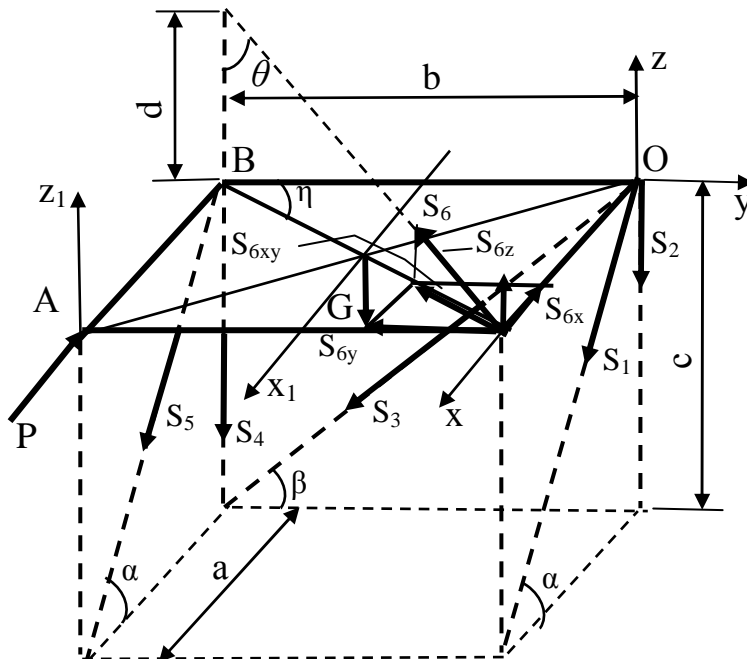
$$a = 3 \text{ м}, b = 3 \text{ м}, c = 3 \text{ м}, d = 3 \text{ м}$$

$$S_1 - ?, S_2 - ?, S_3 - ?,$$

$$S_4 - ?, S_5 - ?, S_6 - ?$$

*Розв'язання:*

Розглянемо рівновагу плити ABCD вагою  $G$ . На неї діє зовнішня сила  $\bar{D}$ . У даному випадку в'язями є стержні 1 ÷ 6. Їх дію на плиту запишемо реакціями  $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3, \bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6$ , які направляємо від вузлів (припускаємо, що стержні розтягнуті). Вибираємо осі координат так, щоб вони перетинали найбільшу кількість стержнів (це точка  $O$ ). Зусилля  $\bar{S}_6$  зручно розкласти на складові  $\bar{S}_{6x}, \bar{S}_{6y}, \bar{S}_{6z}$ , паралельні осям координат.



Їх модулі будуть:

$$S_{6x} = S_6 \cdot \sin \theta \sin \eta;$$

$$S_{6y} = S_6 \cdot \sin \theta \cos \eta;$$

$$S_{6z} = S_6 \cdot \cos \theta.$$

Складаємо шість рівнянь рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad S_1 \cdot \cos \alpha + S_5 \cdot \cos \alpha - S_{6x} - P = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -S_3 \cdot \cos \beta - S_{6y} = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad -S_1 \cdot \sin \alpha - S_2 - S_3 \cdot \sin \beta - S_4 - S_5 \cdot \sin \alpha + S_{6z} - G = 0; \quad (3)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_k) = 0; \quad G \cdot \frac{b}{2} + S_4 \cdot b + S_5 \cdot \sin \alpha \cdot b = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_k) = 0; \quad G \cdot \frac{a}{2} - S_{6z} \cdot a = 0; \quad (5)$$

$$\sum M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad -P \cdot b - S_{6y} \cdot a + S_5 \cdot \cos \alpha \cdot b = 0. \quad (6)$$

Для розв'язання рівнянь рівноваги треба визначити синуси і косинуси кутів  $\theta, \eta, \alpha, \beta$ , користуючись заданими розмірами  $a, b, c, d$ :

$$\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5};$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \eta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \eta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{9 + 9 + 9}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

З отриманих рівнянь рівноваги (1) ÷ (6) визначимо невідомі зусилля:

З 5-го рівняння

$$S_{6z} = \frac{G}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (кН)}, \quad \text{тому} \quad S_6 = \frac{S_{6z}}{\cos \theta} = \frac{3}{1/\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5,1 \text{ (кН)};$$

з 6-го рівняння

$$S_5 = \frac{P \cdot b + S_{6y} \cdot a}{b \cdot \cos \alpha} = \frac{10 \cdot 3 + 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3}{3 \cdot \frac{3}{5}} = \frac{(30 + 9) \cdot 5}{9} \approx 21,7 \text{ (кН)};$$

з 4-го рівняння

$$S_4 = -\frac{G}{2} - S_5 \cdot \sin \alpha = -\frac{6}{2} - \frac{39 \cdot 5}{9} \cdot \frac{4}{5} = -3 - 17,3 = -20,3 \text{ (кН)};$$

з 2-го рівняння

$$S_3 = -\frac{S_{6y}}{\cos \beta} = -\frac{3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{5}} = -5 \text{ (кН)};$$

з 1-го рівняння

$$S_1 = \frac{P + S_{6\bar{o}} - S_5 \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{10 + 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{195}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{10 + 3 - 13}{\frac{3}{5}} = 0;$$

з 3-го рівняння

$$\begin{aligned} S_2 &= -S_1 \sin \alpha - S_3 \sin \beta - S_4 - S_5 \sin \alpha - G + S_{6z} = \\ &= 0 + 5 \cdot \frac{4}{5} + 20,3 - 17,3 - 6 + 3 = 4 \text{ (кН)}. \end{aligned}$$

Для перевірки складемо рівняння моментів, наприклад, відносно осі  $x_1$ , яка проходить через центр ваги плити:

$$\begin{aligned} \sum M_{x_1}(\bar{F}_k) &= +S_5 \sin \alpha \cdot \frac{b}{2} + S_4 \cdot \frac{b}{2} - S_1 \sin \alpha \cdot \frac{b}{2} - S_2 \cdot \frac{b}{2} - S_3 \sin \beta \cdot \frac{b}{2} + \\ &+ S_{6z} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \left( S_5 \sin \alpha + S_4 - S_1 \sin \alpha - S_2 - S_3 \sin \beta - S_{6z} \right) = \\ &= \frac{b}{2} \left( 17,3 - 20,3 + 3 - 0 - 4 + 5 \cdot \frac{4}{5} \right) \approx \frac{b}{2} \cdot 0 \approx 0. \end{aligned}$$

Відповідь:  $S_1 = 0$ ;  $S_2 = 4$  кН;  $S_3 = -5$  кН;  $S_4 = -20,3$  кН;  $S_5 = 21,7$  кН;

$S_6 = 5,1$  кН. Стержень 1 - не навантажений; стержні 2, 5, 6 - розтягнуті; стержні 3, 4 - стиснуті.

### 2.5.1. Завдання для роботи С4 «Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту»

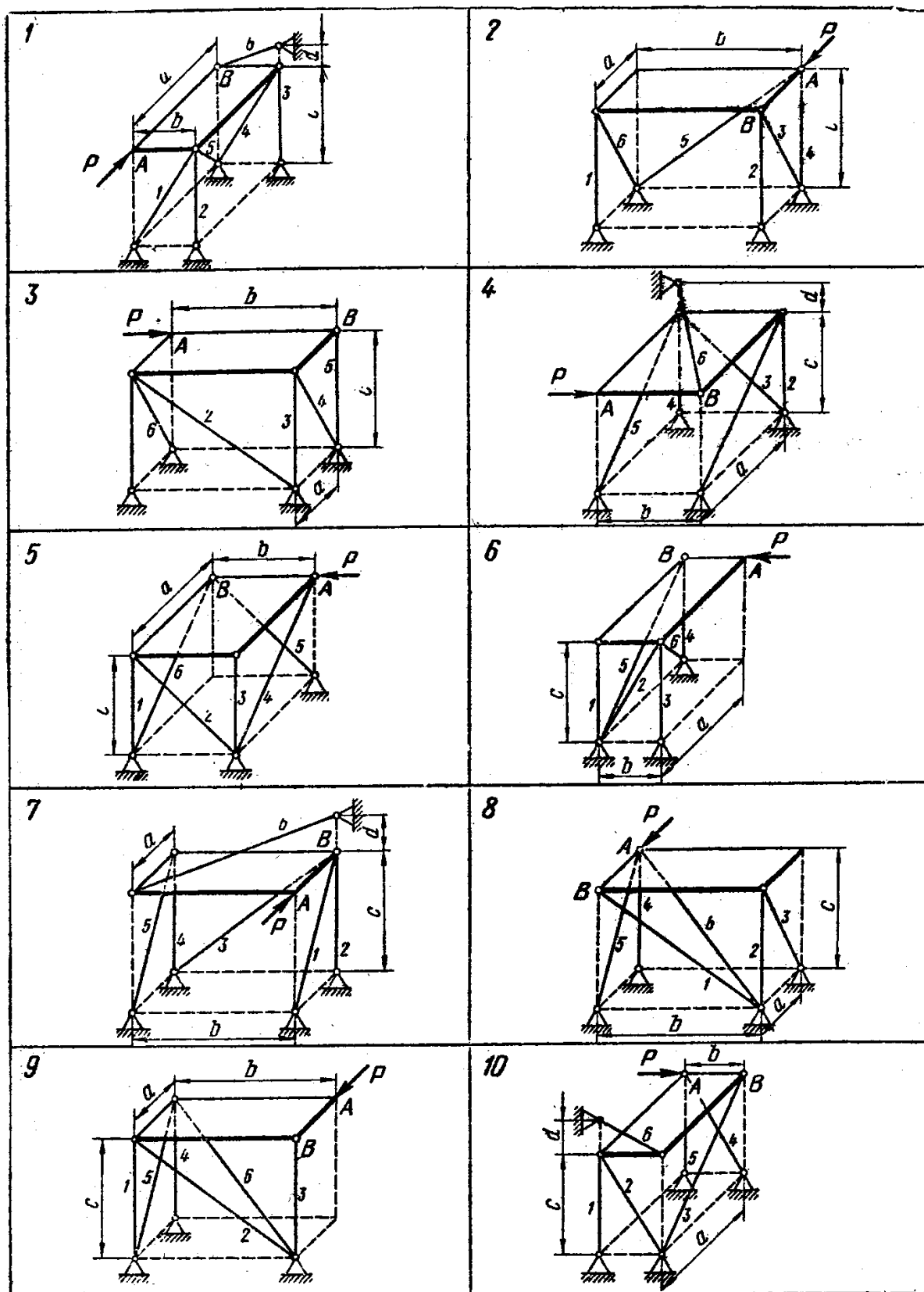
Визначити реакції стержнів, які підтримують тонку горизонтальну плиту вагою  $\bar{G}$  при дії на неї уздовж сторони АВ зовнішньої сили  $\bar{P}$ . Схеми конструкцій наведені на наступних сторінках. Значення сил  $G, P$  і розміри  $a, b, c, d$  плити задаються.

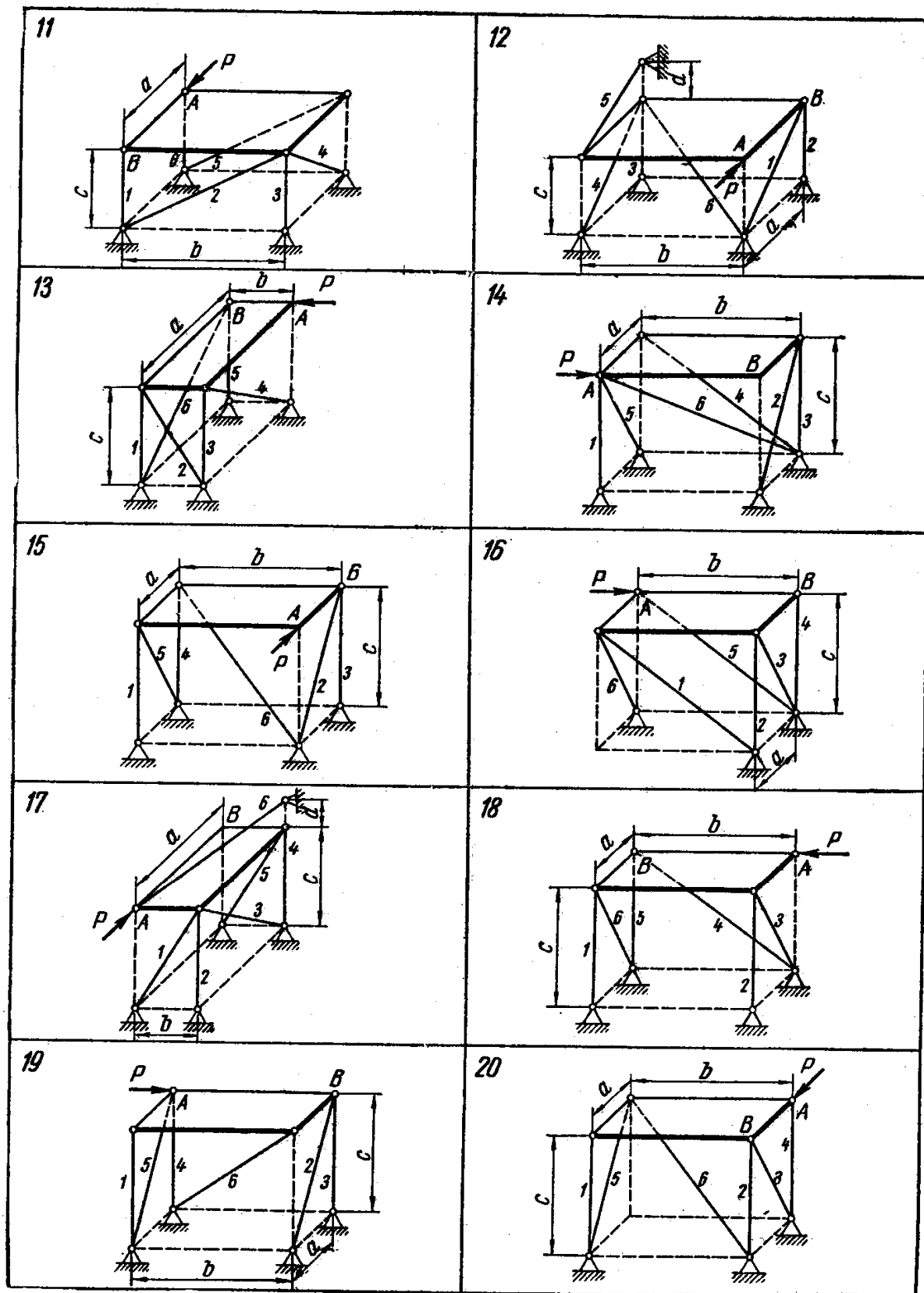
#### Варіанти навантажень для роботи С-4

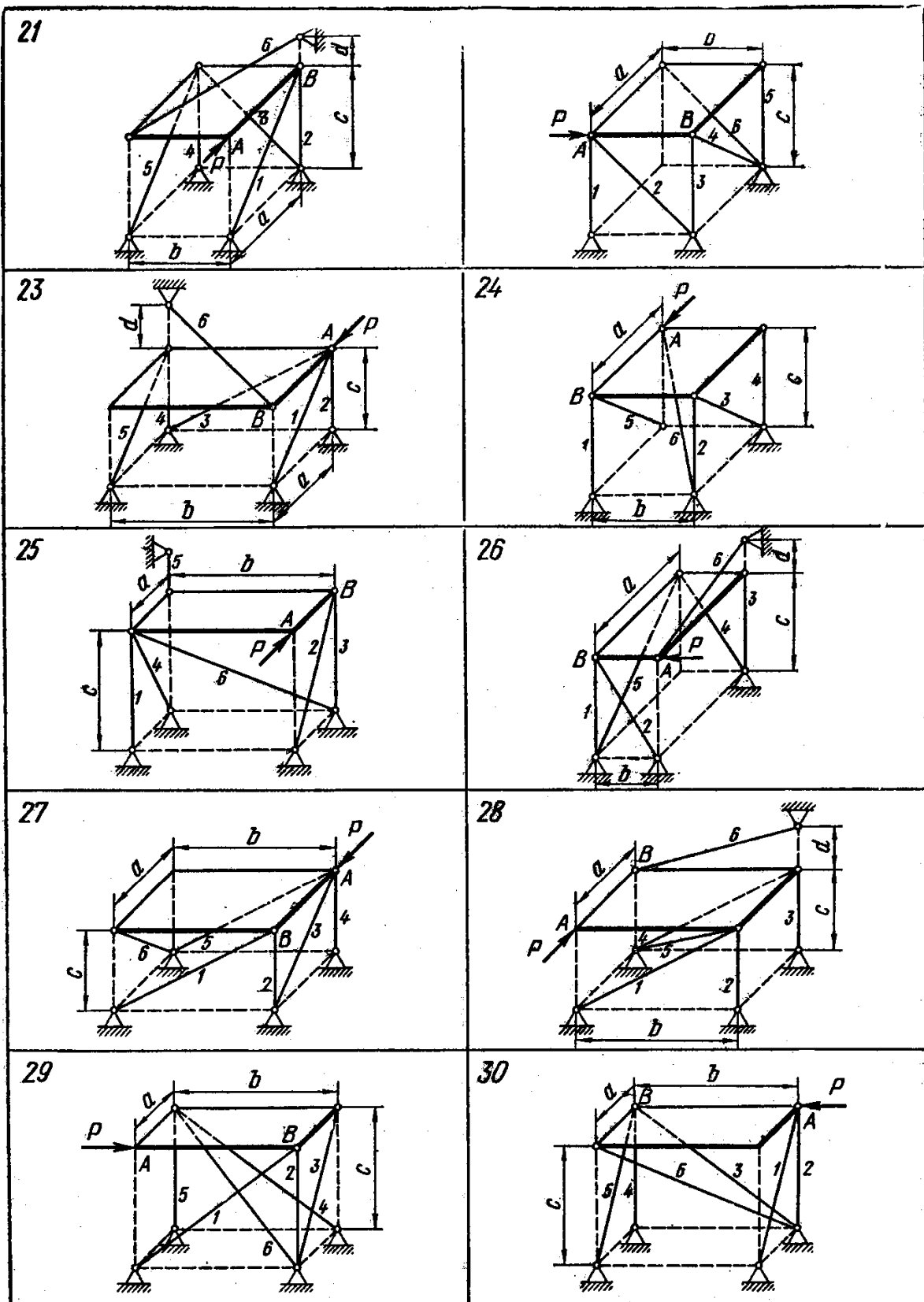
„Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту”

№ варіанта	$P$	$G$	Геометричні розміри, м			
	кН		$a$	$b$	$c$	$d$
1	25	20	8	2,5	3,5	1
2	30	28	5,5	5	3,5	-
3	20	18	4	4,5	3,5	-
4	30	28	7	4	3,5	1
5	35	32	8	4	4	-
6	25	22	9	2,5	4,5	-
7	22	20	4	5	3	1,5
8	35	30	5,5	5,5	4	-
9	40	36	6	6	4	-
10	10	8	8,5	2,5	3,5	2,0
11	25	20	3	2,5	1,5	-
12	35	33	6	5,5	3	1
13	25	24	9,5	2,5	3,5	-
14	35	33	5	7	4	-
15	40	35	5	7	4	-
16	15	14	3,5	4,0	3	-
17	25	20	8,0	2,5	3,5	-
18	35	30	5,5	6	4	-
19	25	20	4,0	5,0	4,0	-
20	33	35	5,5	6,0	4,0	-
21	30	28	7,0	4,0	4,0	1,0
22	20	16	5,5	3,0	3,0	-
23	25	20	4,0	5,0	3,0	1,5
24	30	28	7,0	4,0	4,0	-
25	35	30	5,0	6,0	4,0	
26	25	20	8,0	2,5	3,5	1,0
27	35	33	5,5	6,0	3,0	-
28	25	30	5,0	6,0	3,0	1,5
29	35	30	5,0	5,5	4,0	-
30	25	20	4,0	5,0	4,0	-









### 3. Методичні рекомендації щодо використання ПЕОМ при виконанні РГЗ «Визначення реакцій опор складеної конструкції» та РГЗ «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми» .

Для перевірки достовірності результатів розв’язання системи алгебраїчних рівнянь рівноваги складеної конструкції при визначенні реакцій в’язей та розв’язання системи алгебраїчних рівнянь рівноваги вузлів плоскої ферми використовується ПЕОМ. Розрахунки виконуються у програмі MS Excel пакету MS Office, або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org.2.0.4.

#### 3.1. *Методологія розрахунків*

Для розв’язання системи алгебраїчних рівнянь рівноваги використовується метод, згідно з яким рівняння рівноваги записуються у матричній формі:

$$[A]*[X] = [B], \quad (1)$$

де  $[A]$  – квадратна матриця коефіцієнтів при невідомих реакціях опор,  $[X]$  – матриця-стовпець невідомих реакцій опор,  $[B]$  - матриця-стовпець правих частин алгебраїчної системи рівнянь, у яку входять задані силові фактори. Наприклад, система рівнянь рівноваги складеної конструкції (приклад 1.8)

$$\begin{aligned} X_A + X_C &= 0, \\ Y_A + Y_C - P &= 0, \\ -4X_C + 6Y_C - M &= 0, \\ X_B - X_C + G &= 0, \\ Y_B - Y_C - Q &= 0, \\ 4X_C + 6Y_C - 4G + 3Q &= 0, \end{aligned}$$

де  $P = 5$ ,  $M = 10$ ,  $G = 15$ ,  $Q = 12$  - задані силові фактори, записується у формі:

$$\begin{aligned}
X_A + X_C &= 0, \\
Y_A + Y_C &= 5, \\
-4X_C + 6Y_C &= 10, \\
X_B - X_C &= 15, \\
Y_B - Y_C &= 12, \\
4X_C + 6Y_C &= 4 \cdot 15 - 3 \cdot 12 = 60 - 36 = 24.
\end{aligned} \tag{2}$$

Система рівнянь рівноваги вузлів плоскої ферми (приклад 1.9)

$$\begin{aligned}
\text{вузол А:} \quad & X_A + S_1 \cos 45 + S_2 = 0, \\
& Y_A + S_1 \sin 45 = 0, \\
\text{вузол С:} \quad & -S_1 \cos 45 + S_3 \cos 45 + S_4 = 0, \\
& -S_1 \sin 45 - S_3 \sin 45 = 0, \\
\text{вузол В:} \quad & -S_2 - S_3 \cos 45 + S_5 \cos 45 = 0, \\
& R_B + S_3 \sin 45 + S_5 \sin 45 = 0, \\
\text{вузол D:} \quad & -S_4 - S_5 \cos 45 = -P \cos 45, \\
& -S_5 \sin 45 = P \sin 45.
\end{aligned}$$

де  $P = 10$  - заданий силовий фактор, а значення тригонометричних функцій  $\cos 45 = 0,7$  ,  $\sin 45 = 0,7$  , записується у формі:

$$\begin{aligned}
X_A + S_1 \cdot 0,7 + S_2 &= 0, \\
Y_A + S_1 \cdot 0,7 &= 0, \\
-S_1 \cdot 0,7 + S_3 \cdot 0,7 + S_4 &= 0, \\
-S_1 \cdot 0,7 + S_3 \cdot 0,7 &= 0, \\
-S_2 - S_3 \cdot 0,7 + S_5 \cdot 0,7 &= 0, \\
R_B + S_3 \cdot 0,7 + S_5 \cdot 0,7 &= 0, \\
-S_4 - S_5 \cdot 0,7 &= -7, \\
-S_5 \cdot 0,7 &= 7,
\end{aligned} \tag{3}$$

Матрична форма запису системи рівнянь (2) набуде вигляду (приклад 1.8):

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline X_A \\ \hline Y_A \\ \hline X_B \\ \hline Y_B \\ \hline X_C \\ \hline Y_C \\ \hline \end{array} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 5 \\ \hline 10 \\ \hline -15 \\ \hline 12 \\ \hline 24 \\ \hline \end{array} \\ \end{bmatrix}.$$

Матрична форма запису системи рівнянь (3) набуде вигляду (приклад 1.9):

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0,7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0,7 & 0 & 0,7 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0,7 & 0 & -0,7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,7 & 0 & 0,7 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0,7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,7 \\ \hline \end{array} \\ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline X_A \\ \hline Y_A \\ \hline R_B \\ \hline S_1 \\ \hline S_2 \\ \hline S_3 \\ \hline S_4 \\ \hline S_5 \\ \hline \end{array} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline -7 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \\ \end{bmatrix}.$$

Якщо обидві частини рівняння (1) помножити зліва на обернену матрицю  $[A]^{-1}$ , отримаємо розв'язок:

$$[X] = [A]^{-1} * [B]. \quad (4)$$

Таким чином, для отримання розв'язка (4) системи алгебраїчних рівнянь необхідно:

- 1) сформулювати матрицю коефіцієнтів при невідомих реакціях опор  $[A]$  і матрицю-стовпець правих частин  $[B]$ ;
- 2) обчислити обернену матрицю  $[A]^{-1}$ ;
- 3) отримати матрицю-стовпець шуканих реакцій опор  $[X]$  як результат добутку оберненої матриці  $[A]^{-1}$  на матрицю-стовпець правих частин  $[B]$ .

### **3.2. Запуск програми *OpenOffice.org Calc***

Для запуску програми можна використати один з двох способів:

1) якщо на робочому столі, або на панелі задач ОС Windows є ярлик запуску програми *OpenOffice.org Calc*, двічі клацнути лівою кнопкою миші ( 2ЛК ) по цьому ярлику;

2) клацнути лівою кнопкою миші ( 1ЛК ) по кнопці "Пуск" на панелі задач, у головному меню підвести курсор миші до стрічки "Программы", в меню другого рівня - до стрічки " OpenOffice.org.2.0.4 ", в меню третього рівня клацнути 1ЛК - по стрічці " *OpenOffice.org Calc* ".

За декілька секунд на екрані з'явиться робоче вікно програми *OpenOffice.org Calc*.

### **3.3. Збереження робочого файлу.**

Відкритий файл програми *OpenOffice.org Calc* з прізвищем студента зручно до початку роботи зберегти у папку з прізвищем викладача. Для цього необхідно скористатися пунктом головного меню програми "Файл" і стрічкою "Сохранить как". У вікні "Сохранение документа" зробити 2ЛК на папці з прізвищем викладача, а у полі "Имя файла" ввести своє прізвище, після чого клацнути 1ЛК по кнопці "Сохранить".

### **3.4. Підготовка початкових даних:**

Для прикладу 1.8:

- у комірки A1 і H1 ввести назви для матриць, що будуть формуватись: «матриця коефіцієнтів при реакціях опор» і «матриця правих частин» відповідно;
- у комірки A2-F2 ввести позначення шуканих реакцій опор;
- у комірки A3-F8 ввести значення матриці коефіцієнтів при невідомих реакціях опор [A];
- у комірки H3-H8 ввести значення матриці-стовпця правих частин [B];

Для прикладу 1.9:

- у комірки A1 і I1 ввести назви для матриць, що будуть формуватись: «матриця коефіцієнтів при реакціях опор і зусиллях у стержнях» і «матриця правих частин» відповідно;
- у комірки A2-H2 ввести позначення шуканих реакцій опор і зусиль у стержнях;
- у комірки A3-H10 ввести значення матриці коефіцієнтів при невідомих реакціях опор і зусиллях у стержнях [A];
- у комірки J3-J10 ввести значення матриці-стовпця правих частин [B];

### **3.5. Обчислення оберненої матриці $[A]^{-1}$ :**

- у комірку A9 (A12) ввести назву «обернена матриця»;
- встановити курсор на комірку A10 (A13), з якої буде починатись обернена матриця;
- клацнути ЛК на іконці "  $f_x$  " у стрічці формул, по якій викликається Майстер функцій;
- у вікні Майстра функцій вибрати в полі "Категорія" значення "Масив", у полі "Функции" відмітити функцію "MINVERSE", яка обчислює обернену матрицю, і клацнути по кнопці "Далее";
- у центральній частині вікна Майстра функцій з'явиться поле, в яке треба ввести діапазон комірок початкової матриці [A]. Для цього можна клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч даного поля ( вона мінімізує розміри вікна Майстра функцій), помітити мишею або клавішами зі стрілками при натиснутій клавіші "Shift" комірки A3-F8 (A3-H10) матриці коефіцієнтів, знов клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч поля ( вона максимізує розміри вікна Майстра функцій);
- клацнути по кнопці "ОК" Майстра функцій. У комітках A10-F15 (A13-H20) з'являться коефіцієнти оберненої матриці  $[A]^{-1}$ .



### **3.6. Обчислення значень матриці-стовпця шуканих реакцій опор [X].**

- у комірку Н9 (І12) ввести назву «матриця розв'язків»;
- встановити курсор на комірку Н10 (J13), з якої буде починатись матриця-стовпець шуканих реакцій опор;
- клацнути ЛК на іконці "  $f_x$  " у стрічці формул, по якій викликається Майстер функцій;
- у вікні Майстра функцій вибрати у полі "Категория" значення "Масив", у полі "Функции" відмітити функцію "MMULT", яка обчислює добуток двох матриць, і клацнути по кнопці "Далее";
- у центральній частині вікна Майстра функцій з'являться два полі, у перше з яких треба ввести діапазон комірок оберненої матриці  $[A]^{-1}$ : A10- F15 (A13- H20), а у друге - діапазон комірок матриці-стовпця правих частин [B]: H3-H8 (J3-J10). Для цього потрібно послідовно у кожному з двох полів: клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч даного поля ( вона мінімізує розміри вікна Майстра функцій), помітити мишею або клавішами зі стрілками при натиснутій клавіші "Shift" потрібні комірки, знов клацнути на кнопку зі стрілкою, яка знаходиться праворуч поля ( вона максимізує розміри вікна Майстра функцій);
- клацнути по кнопці "ОК" Майстра функцій. У комірках Н10-Н15 (J13-J20) з'являться результати розрахунків шуканих реакцій опор;
- у комірки G10-G15 (I13-I20) ввести позначки шуканих реакцій опор зі знаками рівності, які вирівняти по правому краю комірок;
- послідовно виділити усі матриці і проставити в них границі комірок.

### **3.7. Збереження файлу з розрахунками на жорсткому диску і дискеті.**

Для збереження файлу на жорсткому диску можна скористатися

пунктом головного меню програми "Файл" і стрічкою "Сохранить" (або відповідною іконкою на панелі інструментів).

Для збереження файлу на дискеті потрібно скористатися пунктом головного меню програми "Файл" і стрічкою "Сохранить как". У вікні "Сохранение документа" у полі "Папка" вибрати стрічку "Диск 3,5 (A:)", у полі "Тип файла" вибрати стрічку "Microsoft Office 97/2000/XP", після чого клацнути ЛК по кнопці "Сохранить".

### 3.8. Оформлення результатів розрахунків.

Сторінку з результатами розрахунків потрібно надрукувати на будь-якому принтері і додати до РГЗ.

Приклади оформлення робочого листа файлу і сторінка розрахунків наведені на рис.1 (приклад 1.8) і рис.2 (приклад 1.9) відповідно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Матрица коэффициентов при реакциях опор:							Матрица правых частей:							
2	$X_A$	$Y_A$	$X_B$	$Y_B$	$X_C$	$Y_C$									
3	1	0	0	0	0	1	0	0							
4	0	1	0	0	0	0	1	0							
5	0	0	0	0	0	-4	6	10							
6	0	0	1	0	-1	0		-15							
7	0	0	0	1	0	-1		12							
8	0	0	0	0	4	6		24							
9	Обернута матрица:							Матрица развязки:							
10	1	0	0,125	0	0	-0,125	$X_A =$	-1,75							
11	0	1	-0,08333	0	0	-0,08333	$Y_A =$	2,17							
12	0	0	-0,125	1	0	0,125	$X_B =$	-13,25							
13	0	0	0,0833333	0	1	0,0833333	$Y_B =$	14,83							
14	0	0	-0,125	0	0	0,125	$X_C =$	1,75							
15	0	0	0,0833333	0	0	0,0833333	$Y_C =$	2,83							

Рис.1 - Результаты расчета реакций опор составленной конструкции

Microsoft Excel - Статика_ЭВМ_печ_форма															
Введите вопрос															
A35															
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
2	Матрица коэффициентов при реакциях опор и усилиях у стержнях:								Матрица правых частей:						
3	$X_A$	$Y_A$	$R_B$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$							
4	1	0	0	0,7	1	0	0	0		0					
5	0	1	0	0,7	0	0	0	0		0					
6	0	0	0	-0,7	0	0,7	1	0		0					
7	0	0	0	-0,7	0	-0,7	0	0		0					
8	0	0	0	0	-1	-0,7	0	0,7		0					
9	0	0	1	0	0	0,7	0	0,7		0					
10	0	0	0	0	0	0	-1	-0,7		-7					
11	0	0	0	0	0	0	0	-0,7		7					
12	Обернена матрица коефіцієнтів при реакціях опор і зусиллях у стержнях:								Матрица розв'язків:						
13	1	0	1	0	1	0	1	0	$X_A =$	-7,00					
14	0	1	0,5	0,5	0	0	0,5	-0,5	$Y_A =$	-7,00					
15	0	0	-0,5	0,5	0	1	-0,5	1,5	$R_B =$	14,00					
16	0	0	-0,71429	-0,71429	0	0	-0,71429	0,714286	$S_1 =$	10,00					
17	0	0	-0,5	0,5	-1	0	-0,5	-0,5	$S_2 =$	0,00					
18	0	0	0,714286	-0,71429	0	0	0,714286	-0,71429	$S_3 =$	-10,00					
19	0	0	0	0	0	0	-1	1	$S_4 =$	14,00					
20	0	0	0	0	0	0	0	-1,42857	$S_5 =$	-10,00					
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															
33															
34															

Рис.2 - Результати розрахунку реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми

## ***СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ***

1. Яблонский Д.А. и др. Курс теоретической механики. Ч.1, П. - М., 1971.
2. Путята Т.В., Фрадлін Б.Н. Методика розв'язання задач з теоретичної механіки - К.: Радянська школа, 1955.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретичної механіки. Ч. 1, П. - М.: Наука, 1979.
4. Тарг С.М. Курс теоретической механки. - М., 2000.
5. Бать М.И. и др. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч.1, П. - М., 1986.
6. Павловський М.О. Теоретична механіка. – К., 2002.
7. Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О., Складаров В.О. Методичні вказівки для самостійної роботи з розділу «Статика» курсу теоретичної механіки. - Харків: ХНАМГ, 2004. - 44 с.
8. Шпачук В.П., Золотов М.С., Рубаненко О.І., Гарбуз А.О. Теоретична механіка (Навчально-методичний посібник для студентів технічних спеціальностей). - Харків: ХНАМГ, 2007. - 124 с.

## ЗМІСТ

Загальні вказівки .....	3
1. Рівновага плоскої системи сил .....	4
1.1. Проекція сили на вісь .....	4
1.2. Алгебраїчний момент сили відносно точки .....	4
1.3. Пара сил .....	5
1.4. Розподілені сили .....	6
1.5. Види в'язей у площині і напрям їх реакцій .....	7
1.6. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил .....	9
1.7. Методики розв'язання задач статки .....	10
1.8. Рівновага системи тіл .....	10
1.8.1. Завдання для роботи С1 «Визначення реакцій опор складеної конструкції» .....	14
1.9. Розрахунок плоскої ферми .....	19
1.9.1. Завдання для роботи С2 «Визначення реакцій опор і зусиль у стержнях плоскої ферми» .....	23
2. Рівновага просторової системи сил .....	28
2.1. Момент сили відносно осі .....	28
2.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил .....	29
2.3. Визи в'язей у просторі і напрям їх реакцій .....	29
2.4. Визначення реакцій опор твердого тіла .....	31
2.4.1. Завдання для роботи С3 «Визначення реакцій опор твердого тіла» .....	32
2.5. Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту .....	37
2.5.1. Завдання для роботи С4 «Визначення реакцій стержнів, які підтримують горизонтальну плиту» .....	39

3.	Методичні рекомендації щодо використання ПЕОМ при виконанні РГЗ «Визначення реакцій опор складеної конструкції» та РГЗ «Визначення реакцій опор і зусиль у стер- жнях плоскої ферми» .....	44
3.1.	Методологія розрахунків .....	44
3.2.	Запуск програми OpenOffice.org Calc .....	47
3.3.	Збереження робочого файлу .....	47
3.4.	Підготовка початкових даних .....	47
3.5.	Обчислення оберненої матриці $[A]^{-1}$ .....	48
3.6.	Обчислення значень матриці-стовпця шуканих реакцій опор $[X]$ .....	49
3.7.	Збереження файлу з розрахунками на жорсткому диску і дискеті .....	49
3.8.	Оформлення результатів розрахунків .....	50
	Список літератури .....	52

## Основні формули тригонометрії

### Функції одного кута

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{scs}^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{csc}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

### Функції суми та різниці двох кутів

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

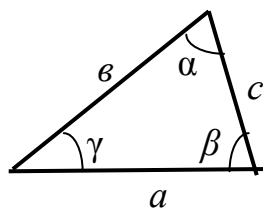
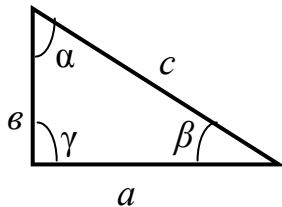
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}$$

### Розв'язання трикутників



#### Прямокутний трикутник

$$\gamma = 90^\circ$$

$$a = c \cdot \sin \alpha \quad b = c \cdot \sin \beta \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$a = c \cdot \cos \beta \quad b = c \cdot \cos \alpha \quad b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \beta$$

#### Будь-який трикутник

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$R$  – радіус кола, що є описаним

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$D = \frac{a + b + c}{2} \quad (\text{напівпериметр})$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P - \hat{a})(D - \hat{n})}{\hat{a} \cdot \hat{n}}} \quad \hat{n} \hat{s} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{P \cdot (D - a)}{\hat{a} \cdot \hat{n}}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(P - \hat{a})(D - \hat{n})}{P \cdot (P - a)}}$$

$S$  – площа трикутника

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \sqrt{P(P - a) \cdot (P - \hat{a}) \cdot (D - \hat{n})} = \frac{\hat{a} \cdot \hat{a} \cdot \hat{n}}{4R}$$

### Функції подвійного і половинного кута

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$tg \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

### Функції від'ємного кута

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg \alpha$$

$$ctg(-\alpha) = -ctg \alpha$$

### Сума і різниця функцій 2-х кутів

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$tg \alpha + tg \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \quad tg \alpha - tg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$ctg \alpha + ctg \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \quad ctg \alpha - ctg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

### Формули зведення

функції	Данный угол						
	$90 - \alpha$	$90 + \alpha$	$180 - \alpha$	$180 + \alpha$	$270 - \alpha$	$270 + \alpha$	$360 - \alpha$
$\sin$	$+\cos \alpha$	$+\cos \alpha$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos$	$+\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$+\sin \alpha$	$+\cos \alpha$

### Значення тригонометричних функцій для кутів 1<sup>ї</sup> чверті

$\alpha =$	0	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$90^0$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	0
$tg \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$
$ctg \alpha$	$\pm \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



*Навчальне видання*

Методичні вказівки для практичних занять, виконання контрольних робіт і самостійної роботи з розділу “СТАТИКА” курсу теоретичної механіки (для студентів спеціальностей 6.092100 – „Промислове і цивільне будівництво”, 6.092103 – „Міське будівництво та господарство”, 6.092108 – „Теплогазопостачання та вентиляція”, 6.092600 – „Водопостачання та водовідведення”, 6.092202 – „Електричний транспорт”, 6.092201 – „Електричні системи і комплекси транспортних засобів”, 6.092203 – „Електро-механічні системи автоматизації та електропривод”)

Укладачі: Шпачук Володимир Петрович,  
Золотов Михайло Сергійович,  
Рубаненко Олександр Ігоревич,  
Гарбуз Алла Олегівна,  
Склярів В’ячеслав Олександрович

Редактор: М.З.Аляб’єв

План 2008, поз. 165М

Підп. до друку	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі.	Обл. – вид. арк. 3,0	Зам. №
Тираж 50 прим.		

61002, м. Харків, вул. Революції, 12.

Сектор оперативної поліграфії при ІОЦ ХНАМГ  
61002, м. Харків, вул. Революції, 12.